

Lycée Mahmoud Elmesaadi ELFAHS	DEVOIR DE CONTROLE N° 2	Prof : Ben HMIDENE. T	
A.S 2017-2018	MATHEMATIQUES	4math	2heures

Exercice n°1 (5points)

1)a) Calculer $(2 + 2i\sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $Z^2 - 4imZ + (6 - 2i\sqrt{3})m^2 = 0$ ou m est un paramètre complexe

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Soient M, A, B et C d'affixes respectives $m, a = (1 - i\sqrt{3})m, b = (3 + i\sqrt{3})m$ et $c = a + b$

a) Montrer que O, M et C sont alignés

b) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{a}{m}$ et $\frac{a}{b}$

c) Montrer que $OACB$ est un rectangle

3) En prend $m = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Construire les points M, A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})

Exercice n°2 (8points)

A- Soit la fonction f définie sur $I =]0, 1[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout x de I $f'(x) = \frac{1}{2(x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer

b) Soit g la fonction réciproque de f . Montrer que pour tout $x \in J$, $g(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right)$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in J$, $0 < g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α , vérifier que $\alpha \in I$.

4) On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C') au point A d'abscisse θ .

b) Etudier la position de (C') par rapport à T .

c) Tracer (C) , (C') et T .

B- Soit h la fonction définie sur l'intervalle $E =]0, \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos^2 x)$.

1) a) Montrer que pour tout x de E , $h(x) = \cot(2x)$.

b) Montrer que h réalise une bijection de E sur \mathbb{R} .

2) Soit k la fonction réciproque de h . Calculer $k(0)$, $k(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.

3) Montrer que K est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout x de \mathbb{R} ; $k'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)}$.

4) Montrer que pour tout $x > 0$, $k(x) + k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice n°3 (7points)

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre I tel que : $(\overline{AB}, \widehat{\overline{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on désigne par $J = A * D$, $K = C * D$ et E le point de point tel que DBE est un triangle équilatéral direct, soit $F = S_{(BE)}(C)$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

b) Caractériser f .

2) Soit $g = r_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ r_{(E, \frac{\pi}{3})}$

a) Vérifier que $(\overline{BE}, \widehat{\overline{BC}}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

b) Donner la nature de g .

c) Déterminer $g(C)$ et en déduire le centre de g .

3) Soit $\varphi = t_{BC} \circ S_{(AC)}$

a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(D)$

b) Vérifier que φ est une symétrie glissante et en déduire ses éléments caractéristiques.