REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
Lycée Bachir Sfar Amdoun Béja

Devoir de Contrôle N° 2 - ANNEE SCOLAIRE : 2016-2017

SECTION : Mathématiques **Professeur :** Ghomriani Béchir

EPREUVE : MATHEMATIQUES **Durée :** 3h **Coéfficient :** 4

Exercice n°1 :(4 points)

ABC triangle équilatéral direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique du point A par rapport à C .

1. Soit f l'antidéplacement qui transforme C en A et A en B.
   a. Montrer que f est une symétrie glissante
   b. Déterminer les éléments caractéristiques de f
2. Soit g la similitude directe qui transforme B en D et I en C .
   a. Déterminer une mesure de l'angle et le rapport de g
   b. Déterminer $g(A)$
   c. Donner la forme réduite de g
3. Soit $S = f \circ g$
   a. Justifier que S est une similitude indirecte
   b. Déterminer $S(I)$ et $S(A)$
   c. Montrer que Ω le centre de S est le barycentre des points pondérées $(B,1)$ *et* $(I,-4)$
4. Montrer que l'axe Δ de S est la perpendiculaire à (AB) en Ω .Construire Δ

Exercice n°2 :(7 points)

A.

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(x) - 1$
   a. Etudier les variations de la fonction g (on ne demande pas les limites)
   b. Déduire que $\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}) \geq 1 \quad pour\ tout \quad x > 0$
2. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x})} & si\ x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

   On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

   a. Montrer que f est continue à droite en O

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.Interpréter graphiquement

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

3.

a. Montrer que pour tous $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f

c. Vérifier qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

d. Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et la tangente (T) dans le repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

B. Soit F la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\ln\left(\sqrt{t}\right)}\,dt$

1.

a. Montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$

b. Montrer que F est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$

c. Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x

2.

a. Calculer $\displaystyle\int_1^x 1+\ln\left(\sqrt{t}\right)\,dt$ pour $x\in\left]0,+\infty\right[$

b. Montrer que $\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\ln\left(\sqrt{t}\right)}\leq 1+\ln\left(\sqrt{t}\right)$ *pour tout* $t\in\left[1,+\infty\right[$

c. En déduire que $F(x)\leq\dfrac{1}{2}(x-1)+x\ln\left(\sqrt{x}\right)$ *pour tout* $x\geq 1$

3.

a. Calculer $\displaystyle\int_1^x 1+\frac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = x+1-2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln(x)$ *pour* $x\in\left]0,+\infty\right[$

b. Montrer que $f(t)\geq 1+\dfrac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ $\forall t\in\left[1,+\infty\right[$

c. En déduire que $x+1-2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln(x)\leq F(x)$ *pour tout* $x\geq 1$

d. Déduire de ce qui précède une valeur approché de $F(2)$

<u>Exercice n°3 :(4 points)</u>

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 2x-3y=-1$

1.

a. Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E)

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

2.

a. Montrer que $13x^2+10x+2\equiv 0(\bmod 5)$ *équivaut à* $x^2-1\equiv 0(\bmod 5)$

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $13x^2+10x+2\equiv 0(\bmod 5)$

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ On considère la droite Δ dont une équation cartésienne est "$2x-3y+1=0$"

Déterminer l'ensemble ζ des points de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs

4.

a. Déterminer le sous-ensemble Γ des points de ζ dont le carré de la distance au point O est un multiple de 5

b. Préciser les points de Γ dont les coordonnées sont strictement comprises entre -20 *et* 20

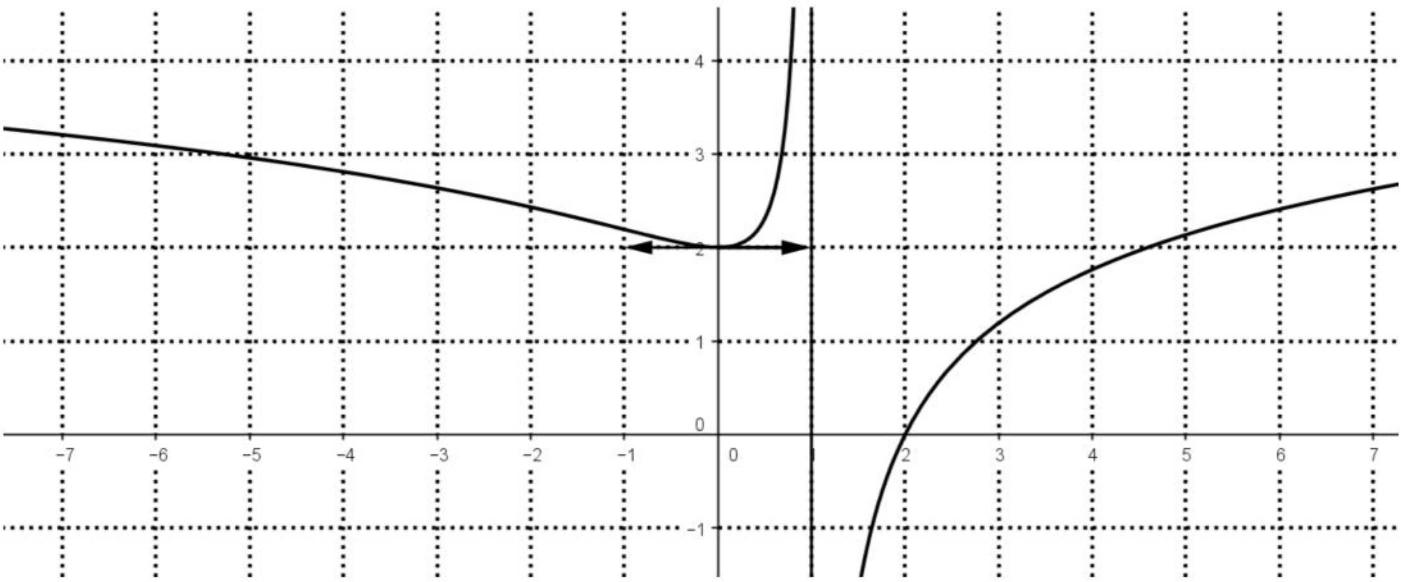
<u>Exercice n°4 :(5 points)</u>

Dans l'annexe ci-jointe on à tracé dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction K définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $\mathrm{K}(x)=1-\dfrac{1}{x-1}+\ln|x-1|$

1. On considère la fonction h définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $h(x)=(x-2)\ln|x-1|$
   a. Montrer que h est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et que $h'(x)=K(x)$
   b. Montrer que le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_h).Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_h) au point O
   c. Déterminer la nature des branches infinies de (C_h)
   d. Construire la courbe (C_h) ainsi que la tangente au point O dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$
2. Soit λ un réel de $]0,1[$
   a. On donne $I=\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{x^2}{x-1}dx$ *et* $J=\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{x}{x-1}dx$

   Calculer I *et* J (On pourra remarquer que : $\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ *et que* $\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$)

   b. Calculer $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_h) ,l'axe des abscisses et les droites d'équations "$x=0$" *et* "$x=\lambda$"
   c. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 1} A(\lambda)$



4
3
2
1
0
−1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
2
3
4
5
6
7