

DEVOIR DE CONTROLE N°02

MATHEMATIQUES

4^{ème} MATHS 1

A S : 2015-2016 *** DUREE : 2heures

Le sujet comporte 2 pages

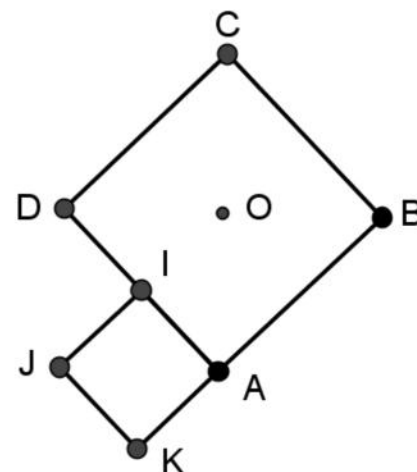
EXERCICE 1

7 points

Soient ABCD et AIJK deux carrés directs tels que $I = A * D$.

Soit O le centre de ABCD.

- 1) Soit f la similitude directe de centre A telle que : $f(D) = C$.
 - a) Préciser le rapport et l'angle de f .
 - b) Déterminer $f(K)$ et $f(J)$.
- 2) Soit g la similitude directe telle que : $g(K) = D$ et $g(J) = C$.
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de g .
 - b) Montrer que $f \circ f = g$.
 - c) En déduire que A est le centre de g .
- 3) Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - a) Montrer que $h = g \circ R$ est une homothétie dont-on précisera le rapport.
 - b) On note Ω le centre de h . Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$.
- 4) Soit σ la similitude indirecte telle que : $\sigma(I) = D$ et $\sigma(J) = C$. On pose $\varphi = h \left(A, \frac{1}{2} \right) \circ \sigma$.
 - a) Donner le rapport de σ .
 - b) Préciser $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$ puis caractériser φ .
 - c) Donner alors le centre et l'axe de σ .



EXERCICE 2

8 points

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 2x + 2)$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- b) Montrer que la droite $D: x = 1$ est un axe de symétrie pour ζ .
- c) Montrer que ζ admet une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{i}) au voisinage de $(+\infty)$.
- 2) a) Etudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x) - x$.
- b) En déduire que $A(1; 1)$ est l'unique point d'intersection de ζ et la droite $\Delta: y = x$.
- 3) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On désigne par ζ' la courbe de g .
- 4) Tracer dans le même repère D, Δ, ζ et ζ' .

II) Soit F la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par : $F(x) = \int_1^{1+\tan(x)} \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et que pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a : $F'(x) = 1$.

b) Déterminer alors l'expression de $F(x)$.

c) En déduire que $\int_1^2 \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt = \frac{\pi}{4}$.

d) Calculer alors $I = \int_1^2 \frac{t^2 - t}{t^2 - 2t + 2} dt$. (En remarquant que $\frac{t^2 - t}{t^2 - 2t + 2} = 1 + \frac{t-1}{t^2 - 2t + 2} - \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$)

2) On note D la partie du plan limitée par ζ , ζ' et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $y = 2$.

a) Hachurer D .

b) Par une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 f(t) dt = 1 + 2 \ln(2) - 2 \times I$.

c) Calculer alors l'aire \mathcal{A} de la partie D .

EXERCICE 3

5 points

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1) a) Montrer que $0 \leq \int_1^e (\ln x)^n dx \leq e - 1$ et que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

2) a) Montrer que $I_1 = -1$.

b) Par une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \times e$.

3) Dans la figure ci-contre le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner l'arc \widehat{AB} de la courbe d'équation $y = 1 + (\ln x)^2$, $x \in [1, e]$ autour de l'axe (Ox) .

a) Calculer I_2 , I_3 et I_4 .

b) Calculer alors le volume V du solide (S) .

