

Devoir de Synthèse N2

Exercice1 :(2 points)

Cocher les bonnes réponses

| | | | |
|--|--------------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1) $e^{-2\ln(\frac{1}{2})+1} =$ | a) $\frac{-1}{4} e$ | b) $4e$ | c) e |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-5x} =$ | a) $+\infty$ | b) $-\infty$ | c) 0 |
| 3) la fonction dérivée de $x \rightarrow x^2 e^x$ sur IR est | a) $x \rightarrow 2xe^x$ | b) $x \rightarrow x^2 e^x$ | c) $x \rightarrow (x^2 + 2x)e^x$ |
| 4) soit $I = \int_{-1}^1 \sin x (\ln x + 1) dx$ | a) $I=0$ | b) $I>0$ | c) $I<0$ |

Exercice 2 :(4points)

Soit ABCDEFGH un cube tel que $AB = 1$, R le symétrique de B par rapport à A et

$$S = \{M \in \mathcal{E} \text{ tel que } \|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}\}$$

1)a) Montrer que $\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) Montrer que S est une sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$

c) Déterminer l'intersection de S et le plan (EBG)

2) Dans la suite soit le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

a) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$

b) Déterminer l'aire du triangle BCE

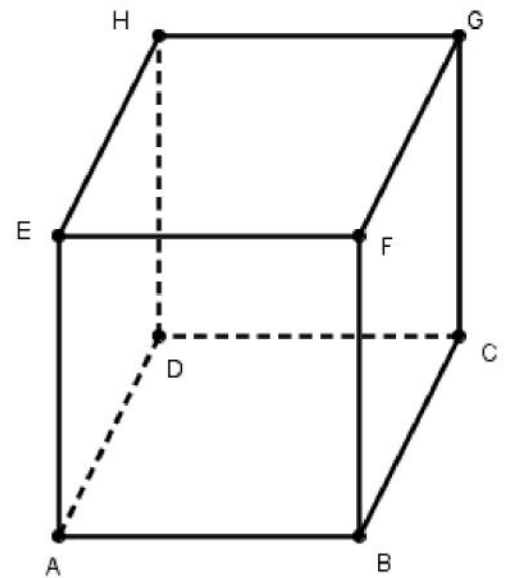
c) Déterminer le volume du tétraèdre BCEG

3)a) Ecrire une équation du plan (BCE)

b) Soit Δ la perpendiculaire à (BCE) en E. Montrer que Δ coupe (BCA) en R

c) Calculer la distance de D à Δ . Que peut-on déduire pour S et Δ ?

c) Montrer que S coupe (BCE) suivant un cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon



Exercice 3 : (4 points)

Dans le plan orienté, soit $ABCD$ un rectangle de sens direct tel que $AB = 2AD = 2$

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ et par H le projeté orthogonal de I sur (AC) . La droite (IH) coupe (CD) en E

Soit S la similitude directe telle que $S(A) = I$ et $S(B) = J$

1) Déterminer le rapport et l'angle de S

2) a) Déterminer $S((AC))$ et $S((BC))$. En déduire que $S(C) = E$

b) Construire le point $D' = S(D)$

3) Soit Ω le centre de S

a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$

b) Caractériser SoS

c) Déterminer le point $I' = S(I)$ et montrer que I' est le milieu de $[AC]$

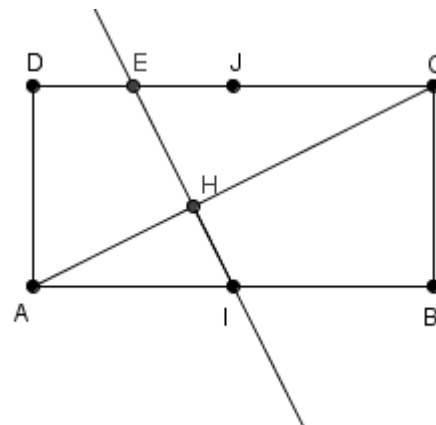
d) Montrer que $\Omega \in (AC)$. En déduire que $\Omega = H$

4) Soit K le milieu de $[CI]$ et σ la similitude indirecte transformant D en B et I en K

Le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$

a) Déterminer la forme complexe de σ

b) Montrer que C est le centre de σ et (IC) son axe



Exercice 4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Soit $E = \{ M(x, y) \text{ tel que } x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de E puis tracer E

2) Soit pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^{2\sin x} \sqrt{4-t^2} dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $F'(x)$

b) Montrer que $F(x) = 2x + \sin(2x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et déduire que $\int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt = \pi$

d) Calculer l'aire de la région de du plan limitée par E

e) Soit S le solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{ABA'}$ de E autour de (o, \vec{i}) avec $A(2,0)$, $B(0,1)$ et $A'(-2,0)$

Déterminer le volume de S

3) Soit $E' = \{ M(x,y) \text{ tel que } 13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0 \}$ et soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i\sqrt{3})z$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

b) Montrer que $f(E) = E'$

c) Tracer E' dans le même repère

Exercice 5 :(5 points)

A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

1) a) Étudier les variations de f_1

b) Tracer sa courbe C_1

2) a) Montrer que f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $(f_n)'(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^{n-1} (n - 2\ln x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que son maximum est $y_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3) a) Calculer pour tout $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_n \leq \frac{1}{2} y_n$

c) En déduire que $y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{2^n}}$ déduire la limite de (y_n)

4) Soit $I_n = \int_1^e f_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

b) Montrer que $0 \leq I_n \leq (e-1) y_n$ et déduire la limite de (I_n)

c) Montrer que pour tout $n > 0$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)! e}$

d) Montrer que $I_n = I_1 + \frac{2}{e} - S_n$ et déduire la limite de (S_n)

Correction

Exercice 1 : 1)b) 2)c) 3)c) 4)a)

Exercice 2 :

1) a) $\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BR} + 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ($\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BA}$ car $A = B^*R$)

b) $M \in S$ eq $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$ eq $\|2\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{2}$ eq $MD = \sqrt{2}$ eq $M \in S(D, \sqrt{2})$

c) $DB = DG = DE = \sqrt{2}$ donc S coupe (EBG) suivant le cercle circonscrit au triangle EBG

2) a) $B(1,0,0), C(1,1,0), E(0,0,1), \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Aire $(BCE) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+0+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Volume $(BCEG) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{BG}| = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \frac{1}{6}$ car $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) a) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BCE) donc $(BCE): x + z + d = 0$ comme $B \in (BCE)$ donc $d = -1$ Donc $(BCE): x + z - 1 = 0$

b) On a $R(-1,0,0)$ et Δ passe par E et de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$ donc $\Delta \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha + 1 \end{cases}$ et $M(x,y,z) \in \Delta \cap (BCE)$ eq $M(-1,0,0) = R$

c) $d(D, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$ donc S et Δ sont sécants

d) $d(D, (BCE)) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$ donc (BCE) coupe suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et de centre H le projeté orthogonal de D sur (BCE)

On pose $H(x,y,z)$ on a $H \in (BCE)$ et \overrightarrow{DH} colinéaire à $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on trouve $H(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

Exercice 3 :

1) le rapport de S est $\frac{IJ}{AB} = \frac{1}{2}$, son angle est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2) a) $S((AC))$ passe par $s(A) = I$ et perpendiculaire à (AC) donc $S((AC)) = (IH)$

$S((BC))$ passe par $s(B) = J$ et perpendiculaire à (BC) donc $S((BC)) = (JC)$

$C \in (AC) \cap (BC)$ donc $s(C) \in S((AC)) \cap S((BC))$ donc $s(C) \in (IH) \cap (JC)$ donc $S(C) = E$

b) $D \in (AD)$ donc $D' \in$ à la perpendiculaire à (AD) passant par I donc $S(D) \in (AB)$

et $D \in (CD)$ donc $D' \in$ à la perpendiculaire à (CD) passant par E d'où la construction de D'

3) a) S similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}, S(\Omega) = \Omega$ et $S(A) = I$ donc $(\Omega A) \perp (\Omega I)$ donc $\Omega \in$ au cercle de diamètre $[AI]$

b) SoS est une similitude directe de centre Ω de rapport $\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc SoS est une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ et de centre Ω

c) I est le milieu de $[AB]$ donc $S(I) = I'$ est le milieu de $[IJ]$ or $JCIA$ est un parallélogramme donc $I' = I^*J = A^*C$

d) $SoS(A) = I'$ et $SoS = h(\Omega, \frac{-1}{4})$ donc $\Omega \in (AI')$ et $(AI') = (AC)$ donc $\Omega \in (AC)$

On a $\Omega \in \mathcal{C}[AI] \cap (AC)$ donc $\Omega = A$ ou H comme $S(A) = I$ donc $\Omega = H$

4) Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image de M par σ donc $z' = a\bar{z} + b$. $\sigma(D) = B$, $\sigma(I) = K$, $z_D = i$, $z_B = 2$, $z_I = 1$ et $z_K = \frac{3+i}{2}$

On trouve $a = \frac{i}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$

b) Le centre de σ a pour affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{\frac{i}{2}\bar{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = 2+i$ l'axe de σ port la bissectrice intérieure de (CB, CD) c'est donc (AC)

Exercice 4 :

1) $M(x,y) \in E$ eq $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ Donc E est une ellipse de sommets principaux $A(2,0), A'(-2,0)$,

de sommets secondaires $B(0,1), B'(0,-1)$ de foyers $F(\sqrt{3}, 0), F'(-\sqrt{3}, 0)$

de directrices $D : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $D' : x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) Soit $u(x) = 2\sin x$ et $f(t) = \sqrt{4-t^2}$

U est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et f est continue sur $[-2, 2]$

donc F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $F'(x) = u'(x) f(u(x)) = 4(\cos x)^2 = 2(1 + \cos 2x)$

b) $F(x) = 2x + \sin(2x) + k$ or $F(0) = 0$ donc $F(x) = 2x + \sin 2x$ et

en particulier $F(\frac{\pi}{2}) = \pi$ Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-t^2} dt = \pi$

d) Soit A l'aire de la région du plan limitée par E et A' l'aire de la région limitée par \widehat{AB} de E

, l'axe des abscisses et $x=0$ or $\widehat{AB} = Cg$ où $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ donc $A = 2 \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt = 2\pi$

e) $\text{Volume}(S) = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)^2 dt = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (4-x^2) dt = \frac{\pi}{4} \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{16\pi}{12}$

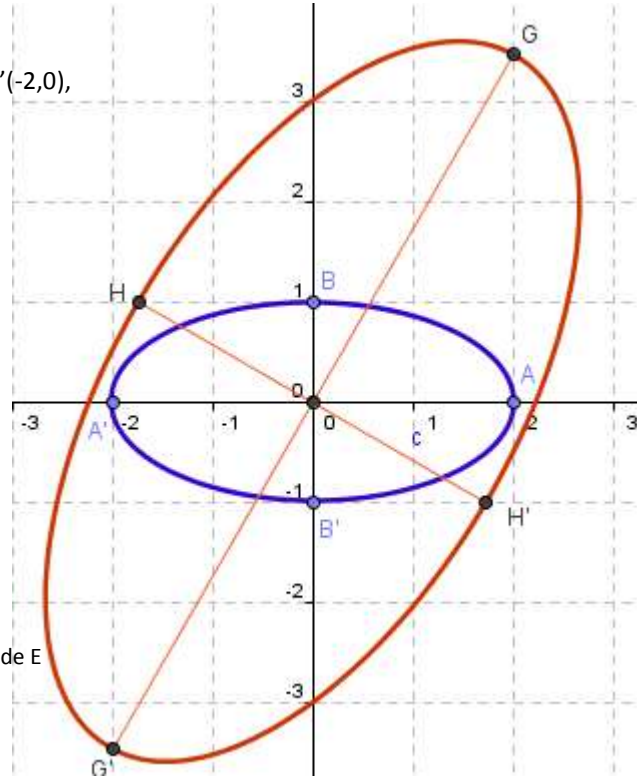
3) a) $a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc f est une similitude directe de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre O

b) Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f(M)$ donc $x' = x - \sqrt{3}y$ et $y' = \sqrt{3}x + y$ pour montrer que $f(E) = E'$ on peut montrer que $f^{-1}(E') = E$

donc $M'(x',y') \in E'$ eq $13x'^2 + 7y'^2 - 6\sqrt{3}x'y' - 16 = 0$ eq $13(x - \sqrt{3}y)^2 + 7(\sqrt{3}x + y)^2 - 6\sqrt{3}(x - \sqrt{3}y)(\sqrt{3}x + y) - 16 = 0$ eq

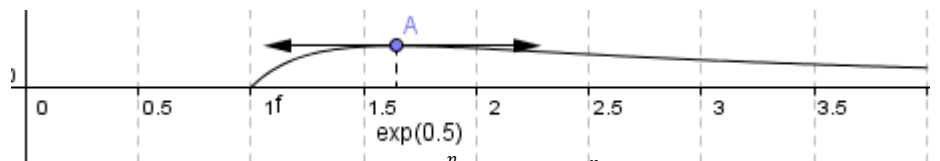
$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ eq $16x^2 + 64y^2 - 16 = 0$ eq $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

c) E' est une ellipse de sommet $G=f(A)$, $G'=f(A')$, $H=f(B)$ et $H'=f(B')$



Exercice 5 :

1) a) $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $(f_1)'(x) = \frac{(1-2\ln x)}{x^3}$ b)



2) f_n atteint son maximum en $e^{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est égal à $y_n = f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln e^{\frac{n}{2}})^n}{(e^{\frac{n}{2}})^2} = \frac{1}{n!} \frac{(\frac{n}{2})^n}{e^n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3) a) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\ln x}{n+1}$ b) pour $x = e^{\frac{n+1}{2}}$, $\frac{f_{n+1}(e^{\frac{n+1}{2}})}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{\ln(e^{\frac{n+1}{2}})}{n+1} = \frac{1}{2}$ eq $\frac{y_{n+1}}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{1}{2}$ eq $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ on a $f_n(e^{\frac{n+1}{2}}) \leq y_n$ d'où

$y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$ c) En écrivant l'inégalité précédente successivement pour $1, 2, 3, \dots, n-1$ et en prenant le produit terme à terme on

obtient le résultat $0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et $y_1 = \frac{1}{2e}$

4) a) $I_1 = \frac{-2}{e} + 1$ b) $0 \leq f_n(x) \leq y_n$ donc $0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq \int_1^e y_n dx$ donc $0 \leq I_n \leq (e-1)y_n$, $\lim I_n = 0$ car $\lim y_n = 0$