

Lycée Martyr Wallid Mechlaoui Mornag	DEVOIR DE CONTROLE N°2	Le :14/02/2013 4 ^{ème} M
Prof :Oueslati.Mongi		Durée : 2H

Exercice n°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) La primitive qui s'annule en 0 de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{3}(\sqrt{3x+1} - \frac{1}{\sqrt{3x+1}})$ sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$

est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}(\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1} - \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}) + \frac{4}{27}$

2) Si u_n est la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \int_0^{\pi} \cos^n x dx$; alors pour tout n de \mathbb{N}^*

$$u_{n+2} = \frac{n+2}{n+1} u_n$$

Exercice n°2 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1) a) Etudier les variations de f et calculer f(e)

b) Tracer la courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $((O; \vec{i}; \vec{j}))$

2) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur J que l'on précisera.

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_f .

3) Soit $F(x) = \int_1^x (f(t) - 1) dt$ pour $x \geq 0$

a) Donner une interprétation graphique de F(x)

b) Montrer que F est bijective de $[1; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$

c) Montrer qu'il existe un réel unique α dans $]1; +\infty[$ tel que $F(\alpha) = e + 2$

4) a) Montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$; on a : $F(x) = \int_1^{f(x)} x - g^{-1}(t) dt$

b) Déduire la valeur de $\int_1^{1+\frac{1}{e}} g^{-1}(t) dt$

5) Soit u_n une suite réelle définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{f(u_n)}$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a $u_n \geq 1$

b) Montrer que u_n est décroissante ; puis déterminer alors sa limite.

c) Soit $v_n = \sum_{k=0}^n \ln(f(u_k))$; montrer que $v_n = 1 - \ln(u_{n+1})$ et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Exercice n°3 (8 points)

Soit ABC un triangle rectangle tel que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB = 2AC$

1) Soit S une similitude directe tel que $S(A) = B$ et $S(C) = A$.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Soit Ω le centre de S ; montrer que Ω est le projeté orthogonale de A sur (BC)

- c) Construire le point $B'=S(B)$
- 2) Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C ne contenant aucun cotés du triangle ABC . Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et à D' respectivement en I et J
- Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$
 - En déduire $S(J)$
- 3) Soit f une similitude indirecte tel que $f(A)=B$ et $f(C)=A$
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de foS^{-1}
 - Soit $f(B)=H$; déterminer $S_{(AB)}(H)$ puis construire le point H
 - Soit Ω' le centre de f . Montrer que $\Omega' \in (BC) \cap (AH)$
 - Construire l'axe de f
- 4) Soit $L=A*B$; le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AL}; \overrightarrow{AC})$
- $h_\alpha: M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z'=(\cos^2\alpha+isina.cos\alpha)z+(\sin^2\alpha-isina.cos\alpha)$
- Déterminer α pour que h_α soit une similitude directe et non un déplacement
 - Déterminer selon α ; le rapport ; l'angle et le centre de h_α