Exercice n°1 : *(3 points)*

Voir annexe page 3, qui sera complétée et rendue avec la copie.

Exercice n°2 : *(6 points)*

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [BC] et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). (*Voir figure page 4*).

Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1) a) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$.
   b) Préciser l'axe Δ de f.

2) Soit B' = f(B).

   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f o f.

   b) En déduire que $\overrightarrow{CB'}=3\overrightarrow{CA}$. Construire le point B'.

   c) Montrer que BB' = BC.

   d) En déduire que f(I) = J.

3) Soit S = f o $S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice n°3 : *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. On a représenté sa courbe (C) ainsi que la courbe (C') de la restriction de sa fonction dérivée f ' sur $[0,+\infty[$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (*Voir figure page 4*).

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en - 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$; puis dresser le tableau de variation de f.

2) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée.

3) a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 1 dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   b) En utilisant des considérations d'aires, montrer que $\frac{\pi}{4}<\int_{-1}^{0}\sqrt{x^3+1}\,dx<1$.

4) On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de (C) autour de l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$. Calculer le volume $\mathscr{V}$ de S.

Exercice n°4 : *(6 points)*

I. Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\mathrm{F}(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

2) En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\mathrm{F}(x)=x$; puis calculer la valeur de $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$.

II. Pour tout n de IN, on donne la fonction f_n définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$\mathrm{f}_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & si\ \ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right] \\ 2n+2 & si\ \ x=0\end{cases}$. On pose $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}_n(x)dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est bien définie et calculer u_0.

2) Montrer que pour tout n de IN, on a : $u_{n+1}-u_n=2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. En déduire que pour tout n de IN,

$$u_n=2\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

3) Calculer pour $p\in IN$, $\int_0^1 x^{2p}dx$. En déduire que pour tout n de IN, on a : $u_n=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$.

4) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_n-2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|\leq\frac{2}{2n+3}$. En déduire que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$.

N.B : On donne : $\sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k$

Nom et prénom : ……………………………………………………………………………………………………

Exercice n°1 : *Q – C – M :*

Chaque question comporte trois propositions. Une seule proposition est exacte. (aucune justification n'est demandée).

Question 1 :

Si f et g sont deux similitudes directes de rapports inverses et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ alors f o g est :

a) ❑ Un antidéplacement ; b) ❑ une translation ; c) ❑ une rotation.

Question 2 :

L'écriture complexe d'une similitude indirecte de centre Ω(1 + i), de rapport 3 et d'axe la droite Δ : y = - x + 2 est

a) ❑ $z' = 3i\,\bar{z} + 1 + i$; b) ❑ $z' = \overline{3iz} + 4i + 4$; c) ❑ $z' = 3i\,\bar{z} - 2i + 2$.

Question 3 :

ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu du segment [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et axe Δ :

a) ❑ $k = \frac{1}{2}$ et Δ la médiatrice de [BC]

b) ❑ $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et Δ la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$

c) ❑ $k = \sqrt{2}$ et Δ la médiatrice de [BC] .

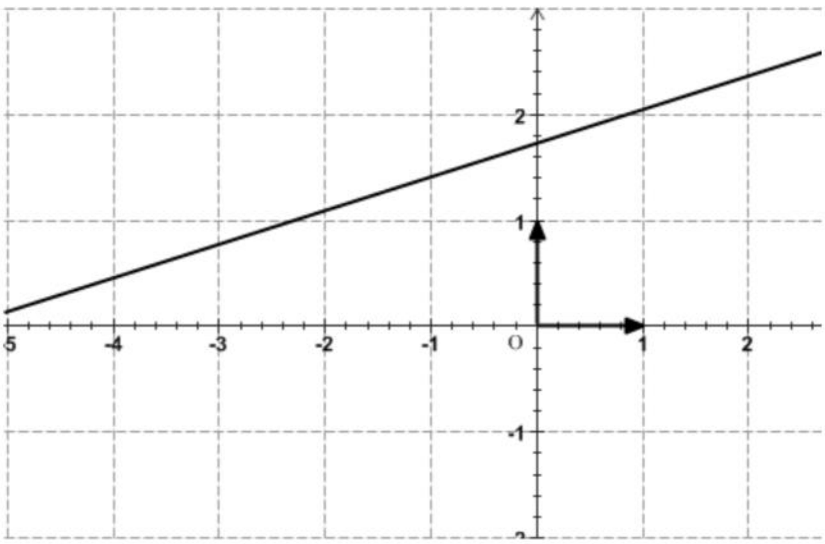
Question 4 :

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$ est égale à :

a) ❑ $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$; b) ❑ Zéro ; c) ❑ $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x dx$.

Question 5 :

La droite (D) ci - contre est la courbe d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.



1) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite (D), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.

a) ❑A = $\frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$;

b) ❑$\frac{1}{3}[f'(0) + 3f(0)]$;

c) ❑On ne peut pas conclure.

2) Soit $\zeta = \{ M(x, y)$ tels que : $y = f(x)$ et $0 \leq x \leq 1 \}$.

On note S le solide obtenu par rotation de ζ autour de l'axe (Ox). Le volume V de S est égal à :

a) ❑ $V = \frac{\pi}{2}\left[\left(f'(0)\right)^2 + 2\left(f(0)\right)^2 + 2f(0)f'(0)\right]$

b) ❑ $V = \frac{\pi}{3}\left[\left(f'(0)\right)^2 + 3\left(f(0)\right)^2 + 3f(0)f'(0)\right]$

c) ❑ On ne peut pas conclure.

Figure de l'exercice n°2 :

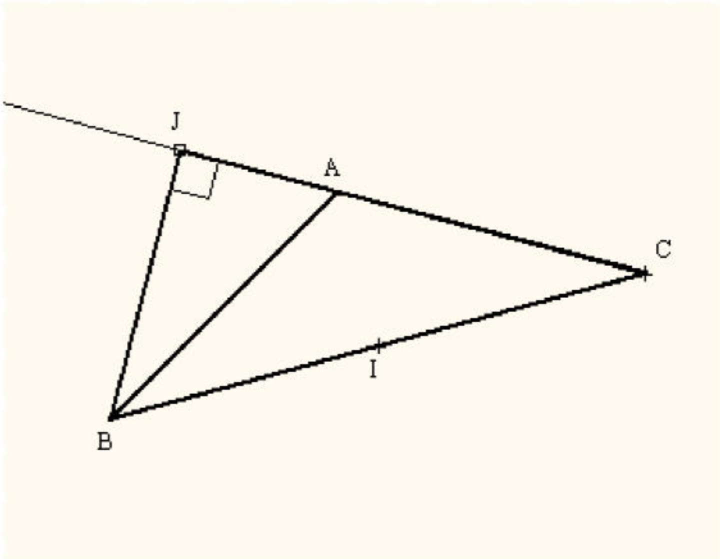
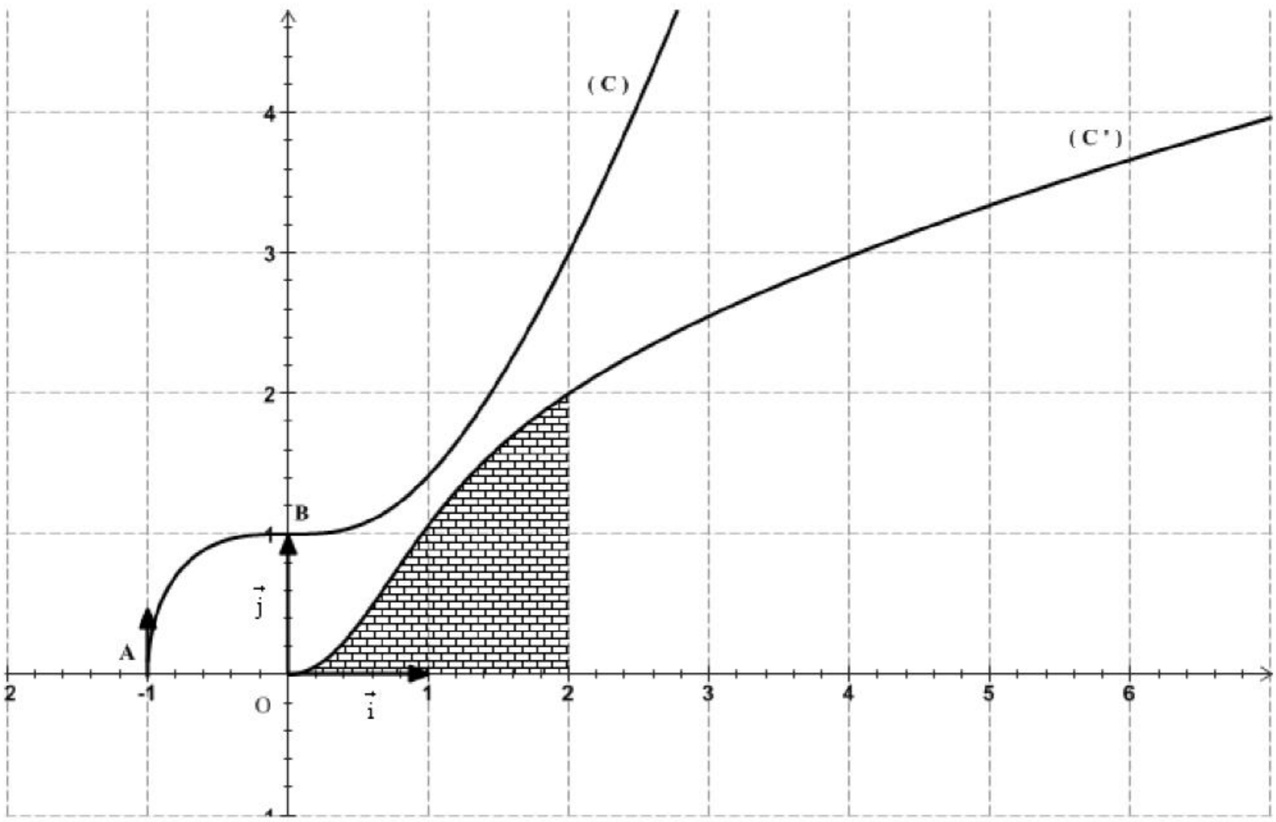


Figure de l'exercice n°3 :



Devoir de contrôle n°2

$4^{ème}$ Maths 1

Corrigé

Exercice n°1 : Q – C – M :

Question 1 :

Si f et g sont deux similitudes directes de rapports inverses et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ alors f o g est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ f o g est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{2} \neq 2k\pi$ $\Rightarrow$ f o g est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

a) ❑ Un antidéplacement ; b) ❑ une translation ; c) ■ une rotation.

Question 2 :

L'écriture complexe d'une similitude indirecte de centre Ω(1 + i), de rapport 3 et d'axe la droite Δ : y = - x + 2 est

a) ❑ $z' = 3i\,\overline{z} + 1 + i$; b) ■ $z' = \overline{3iz} + 4i + 4$; c) ❑ $z' = 3i\,\overline{z} - 2i + 2$.

En effet : $z' = a\overline{z} + b$ tel que 1 + i = a(1 – i) + b (Ω point invariant)

De plus si on prend un point M(2, 0) de Δ, on aura $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$

$\Rightarrow$ z ' = 2a + b et z ' - (1+ i) = 3(2 – 1 – i) $\Rightarrow$ 2a + b = 4 – 2i

D'où le système $\begin{cases} (1-i)a + b = 1 + i \\ 2a + b = 4 - 2i \end{cases}$ $\Rightarrow$ a = -3i et b = 4 + 4i

Question 3 :

ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu du segment [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et axe Δ :

a) ■ $k = \frac{1}{2}$ et Δ la médiatrice de [BC]

b) ❑ $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et Δ la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$

c) ❑ $k = \sqrt{2}$ et Δ la médiatrice de [BC] .

En effet : $k = \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et Δ est la bissectrice intérieure de $\widehat{BAI}$ qui est la médiatrice de [BC]

Question 4 :

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$ est égale à :

a) ☐ $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$; b) ■ Zéro ; c) ☐ $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x dx$.

En effet : $(x \mapsto x^2 \sin x)$ est impaire.

Question 5 :

La droite (D) est la courbe d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.

1) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite (D), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.

a) ■ $A = \frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$; b) ☐ $\frac{1}{3}[f'(0) + 3f(0)]$; c) ☐ On ne peut pas conclure.

En effet : $f(x) = f'(0)x + f(0) \Rightarrow A = \int_0^1 [f'(0)x + f(0)]dx = \frac{1}{2}f'(0) + f(0) = \frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$

2) Soit $\zeta = \{ M(x, y)$ tels que : $y = f(x)$ et $0 \leq x \leq 1 \}$.

On note S le solide obtenu par rotation de ζ autour de l'axe (Ox). Le volume V de S est égal à :

a) ☐ $V = \frac{\pi}{2}\left[(f'(0))^2 + 2(f(0))^2 + 2f(0)f'(0)\right]$

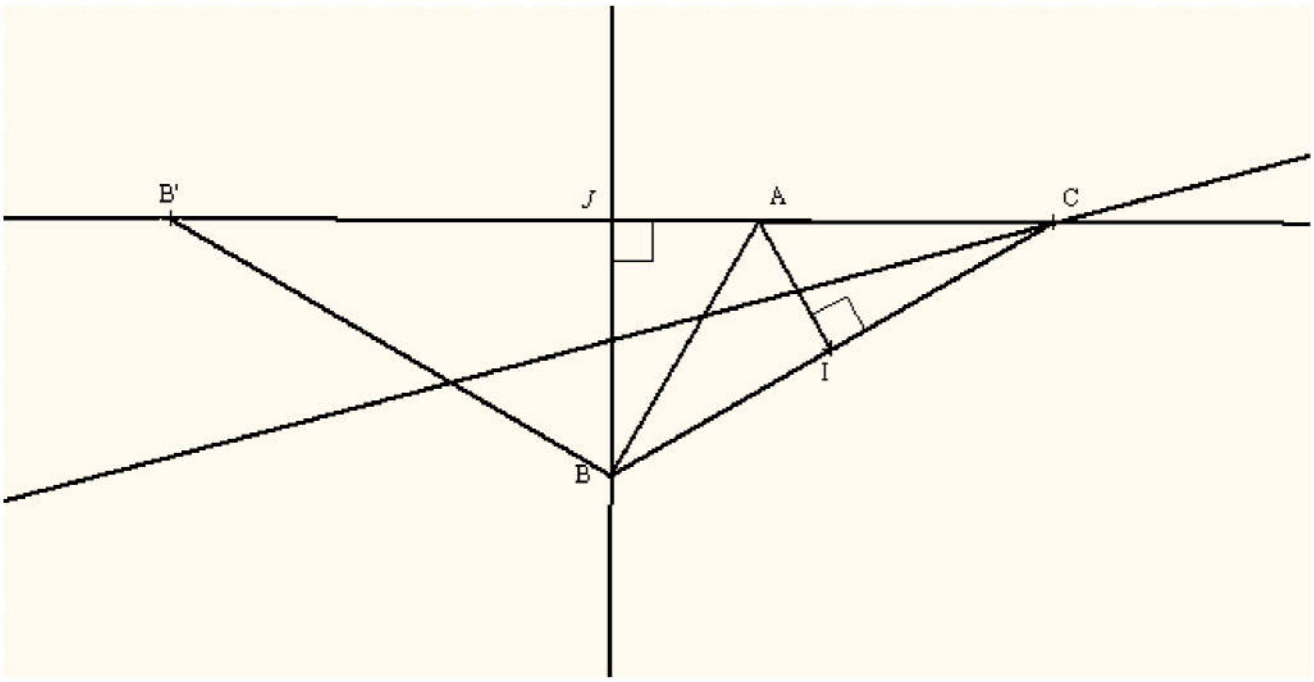
b) ■ $V = \frac{\pi}{3}\left[(f'(0))^2 + 3(f(0))^2 + 3f(0)f'(0)\right]$

c) ☐ On ne peut pas conclure.

En effet :

$$V = \int_0^1 \pi\, f^2(x)dx = \pi \int_0^1 \left[(f'(0))^2 x^2 + 2f'(0)f(0)x + (f(0))^2\right]dx = \frac{\pi}{3}\left[(f'(0))^2 + 3(f(0))^2 + 3f(0)f'(0)\right]$$

Exercice n°2 :



f est la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1. a) Soit k le rapport de f $\Rightarrow k=\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{2CI}{CA}=2\cos\widehat{ACI}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

   b) Δ est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

2. f (B) = B ′.

   a) f o f est l'homothétie de centre C et de rapport 3.

   b) f o f (A) = f (B) = B′ $\Rightarrow h_{(C,3)}(A)=B' \Rightarrow \overrightarrow{CB'}=3\overrightarrow{CA}$

   c) f(C) = C, f(A) = B, f(B) = B′ $\Rightarrow \dfrac{BB'}{AB}=\dfrac{CB}{CA}=\sqrt{3}$, or AB = AC $\Rightarrow$ BB' = BC

   d) BB′ = BC et (BJ) $\perp$ (CB′) en J $\Rightarrow$ (BJ) = méd[CB′] $\Rightarrow$ J est le milieu de [CB′]

   On a I est le milieu de [CB] et f conserve le milieu $\Rightarrow$ f(I) est le milieu [CB′] $\Rightarrow$ f(I) = J.

3. S = f o $S_{(BC)}$ est la composée de deux similitudes indirectes $\Rightarrow$ S est une similitude directe de rapport

   $\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$, de centre S(C) = C et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]\equiv-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice n°3 :

$\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^3+1}$

1. a)
$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^3+1}{(x+1)\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)\sqrt{x^3+1}}$$
$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^3+1}}=\left(\frac{3}{0^+}\right)=+\infty$$

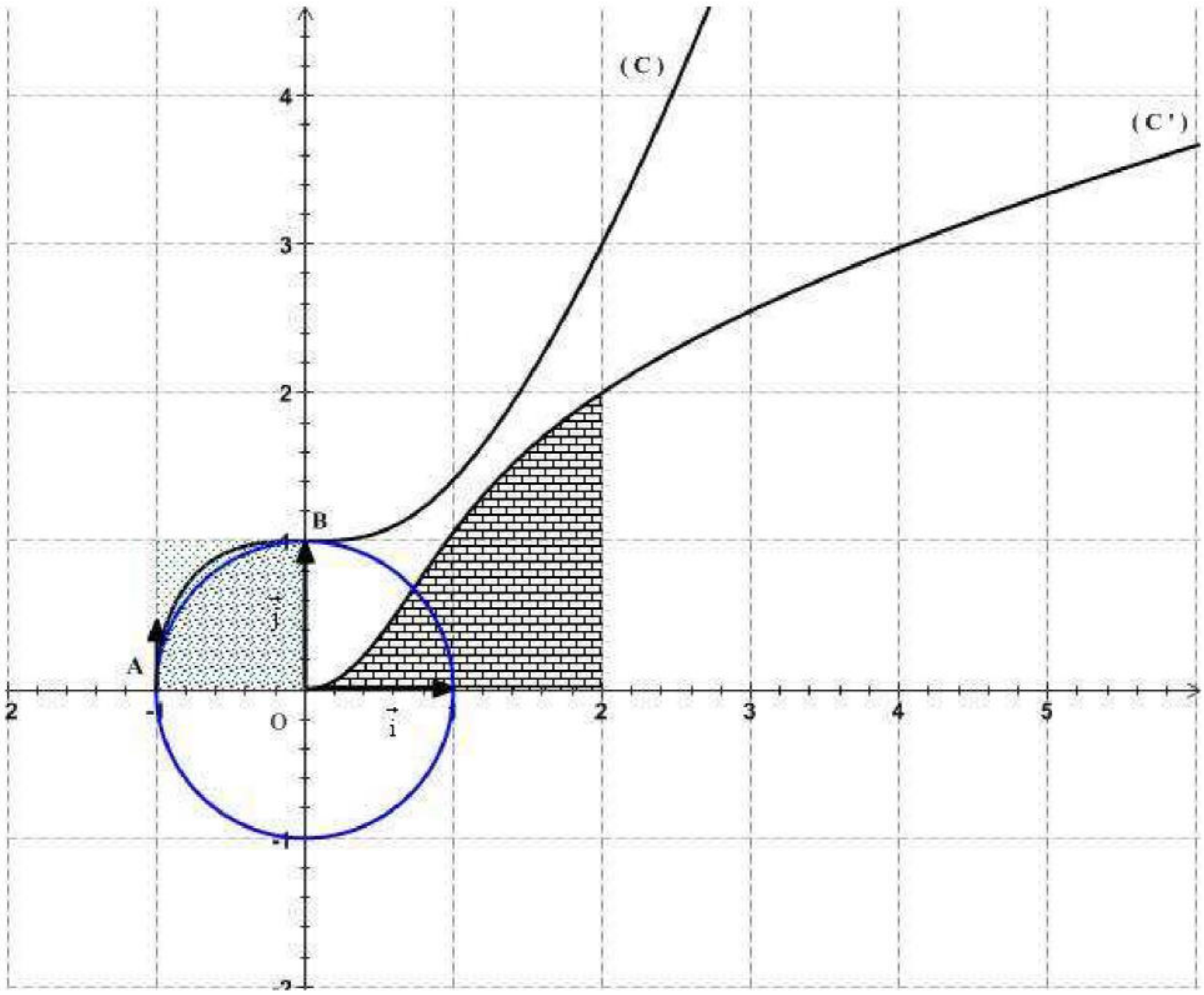
$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0, sa courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droite en – 1.

   b) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a : $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\geq 0,\ \forall\ x\in\,]-1,+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$\mathrm{f}'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$\mathrm{f}(x)$	0	↗			$+\infty$

2. $\mathscr{A} = \int_0^2 f'(x)dx = f(2) - f(0) = 3 - 1 = 2\ U.A$

3. a) Figure.



b) $\int_{-1}^{0} \sqrt{x^3+1}dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les droites d'équations x = - 1 et x = 0 et l'axe des abscisses.

D'après le graphique cette aire est comprise entre l'aire du quart du cercle de centre O et de rayon 1 et l'aire d'un carré de côté 1

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \int_{-1}^{0} \sqrt{x^3+1}dx < 1$$

4. $\mathscr{V} = \int_{-1}^{0} \pi f^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{0} f^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{0} \left(x^3+1\right)dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{0} = \pi\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}\ U.V$

Exercice n°4 :

I. $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1. Soit $\left(\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right)$

φ est continue sur IR donc φ admet au moins une primitive G sur IR.

$F(x) = G(\tan x) - G(0)$

$$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \tan x\right) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ G \text{ est dérivable sur IR} \\ \text{u}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[\subset IR \end{cases} \Rightarrow F = G \circ u - G(0) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Et on a : $F'(x) = \left(1 + \tan^2 x\right) \times \varphi\left(\tan x\right) = \left(1 + \tan^2 x\right) \times \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

2. $F'(x) = 1$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow F(x) = x + c$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, or $F(0) = \int_0^0 \varphi(t)dt = 0 \Rightarrow c = 0$.

$\Rightarrow F(x) = x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et par suite $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$

II. $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2(n+1)x\right)}{\sin x} & si \;\; x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2n+2 & si \;\; x = 0 \end{cases}$. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

1. Pour que la suite (u_n) soit bien définie, il faut que la fonction f_n soit continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(2(n+1)x\right)}{\sin x}$

  $\left(x \mapsto \sin\left(2(n+1)x\right)\right)$ est continue sur IR en particulier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

  $\left(x \mapsto \sin x\right)$ est continue et non nulle sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

  $\Rightarrow f_n$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(2(n+1)x\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin\left(2(n+1)x\right)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 2(n+1) = 2n+2 = f_n(0)$

  $\Rightarrow f_n$ est continue à droite en 0

  Ainsi f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et par suite la suite (u_n) est bien définie.

  $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

2.

➡

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}_{n+1}(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}_n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{f}_{n+1}(x)-\mathrm{f}_n(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(2(n+2)x\right)-\sin\left(2(n+1)x\right)}{\sin x}dx$$

Or $\sin a-\sin b=2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow\ \frac{\sin\left(2(n+2)x\right)-\sin\left(2(n+1)x\right)}{\sin x}=\frac{2\sin\left(x\right)\cos\left((2n+3)x\right)}{\sin x}=2\cos\left((2n+3)x\right)$$

$$\Rightarrow\ \begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\left((2n+3)x\right)dx=\frac{2}{2n+3}\Big[\sin\left((2n+3)x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{2n+3}\left[\sin\left((2n+3)\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=\frac{2}{2n+3}\sin\left((n+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{2n+3}\end{aligned}$$

➡ $u_{k+1}-u_k=\dfrac{2\left(-1\right)^{k+1}}{2k+3},\ \forall\ k\in IN$

Pour k = 0, $u_1-u_0=\dfrac{2\left(-1\right)^1}{3}$

Pour k = 1, $u_2-u_1=\dfrac{2\left(-1\right)^2}{2\times2+3}$

$\vdots$

Pour k = n – 1, $u_n-u_{n-1}=\dfrac{2\left(-1\right)^n}{2\times\left(n-1\right)+3}$

On fait la somme membre à membre, on obtient :

$$u_n-u_0=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+3}\Rightarrow u_n=2+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+3}\underbrace{=}_{\text{On pose p = k + 1}}2+2\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}=2\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^{2p}dx=\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^1=\frac{1}{2p+1}$

$$u_n=2\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}=2\sum_{p=0}^{n}\int_0^1(-1)^p x^{2p}dx=2\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-1)^p x^{2p}dx=2\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-x^2)^p dx=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$N.B:\sum_{p=0}^{n}(-x^2)^p=\frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$$

4.
$$\left|u_n - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| = \left|2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| = \left|2\left(-1\right)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx\right|$$

$$= \underbrace{2\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx}_{\geq 0} \underbrace{\leq}_{\text{Car } \frac{1}{1+x^2}\leq 1} 2\int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{2}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$