

Exercice n°1(4points)

Cocher la seule réponse exacte :

1°) Soit  $z$  le nombre complexe de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$  alors la forme algébrique de  $z$  est égale à

a)  $\sqrt{3} + i$

b)  $1 + i\sqrt{3}$

c)  $\sqrt{3} - i$

2°) Dans l'ensemble des solutions de l'équation  $z^2 + z + 1 = 0$  est :

a)  $\{-1, i\}$

b)  $\left\{ \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right\}$

c)  $\left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$

3°) La forme exponentielle du nombre complexe  $z = -2 - 2i$  est

a)  $-2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b)  $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

c)  $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4°) Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan complexe muni d'un repère orthonormé d'affixes respectives  $a, b, c$  et  $d$ . Une mesure de l'angle  $(\overline{AB}, \overline{CD})$  est :

a)  $\arg\left(\frac{b-a}{c-d}\right)$

b)  $\arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right)$

c)  $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$

5°) On considère les nombres complexes :  $z = 2 + 2i$ ,  $z' = 2 + 2i\sqrt{3}$  et  $z'' = \frac{z}{z'}$ .

La forme exponentielle du nombre complexe  $z''$  est

a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Exercice n°2(5points)

1°) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ .

Démontrer que cette suite est croissante.

2°) On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :  $v_n = u_n + \frac{1}{n n!}$ .

Démontrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ .

En déduire que chacune des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  est convergente. On appelle  $\ell$  et  $\ell'$  leurs limites respectives.

4°) Démontrer que la suite  $(u_n - v_n)$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$  converge vers 0. Conclure.

Exercice n°3(6points)

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient les points A et B d'affixes respectives  $-2i$  et  $1 + 3i$ .

Soit l'application  $f: P \setminus \{A\} \rightarrow P$ ;  $M(z) \mapsto M'(z')$  tel que :  $z' = \frac{z - 1 - 3i}{z + 2i}$ .

1°) a) Soit le point D(0 ; -1). Déterminer, par sa forme algébrique,  $z'$  l'affixe de  $D'$  tel que  $D' = f(D)$ .

b) Soit le point H(x + i) avec x un réel positif.

Montrer que : le triangle HDD' est isocèle en D si, et seulement si,  $x = 4$ .

2°) Soit  $E_1 = \{M(z) \in P \text{ tels que } z' \text{ réel}\}$ . Déterminer l'ensemble  $E_1$ .

3°) Soit  $E_2 = \{M(z) \in P \text{ tels que } |z'| = 1\}$ .

a) Montrer que :  $M(z) \in E_2 \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1$  ; déduire la nature de  $E_2$ .

b) Soit  $N(z)$  un point d'image par  $f$  le point  $N'(z')$ .

Montrer que lorsque  $N \in E_2$  le point  $N'$  appartient au cercle trigonométrique.

4°) a) Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$ ,  $(z' - 1)(z + 2i) = -1 - 5i$ .

b) Déduire que  $M'G \times MA = \sqrt{26}$  où  $G$  est le point d'affixe 1.

Exercice n°4(4points)

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1°) a) Etudier la position de la courbe  $(C)$  et la droite  $\Delta : y = x$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer la courbe  $(C)$ .

2°) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] - \infty ; 1]$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.

b) Etudier la continuité et dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  : fonction réciproque de  $f$  ; justifier.

c) Tracer la courbe  $(C')$  de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

d) Montrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  admettent la même tangente  $T$  en  $O$  ; tracer  $T$ .

3°) Expliciter  $f^{-1}$ .

solutions (Indication)

**Exercice1 :**

b/c/b/c/c

**Exercice2 :**

1°)  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$

2°)  $v_{n+1} - v_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$

3°) ...

$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ ;  $(u_n)$  est majorée par  $v_0$  et

$(v_n)$  est minorée par  $u_0$ ...

4°)  $0 \leq v_n - u_n = \frac{1}{n n!} \leq \frac{1}{n^2}$  car  $n! \geq n$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$  d'où  $l=l'$

Les suites sont adjacentes.

**Exercice3 :**

$f : M(z) \mapsto M'(z) / z' = \frac{z - 1 - 3i}{z + 2i}.$

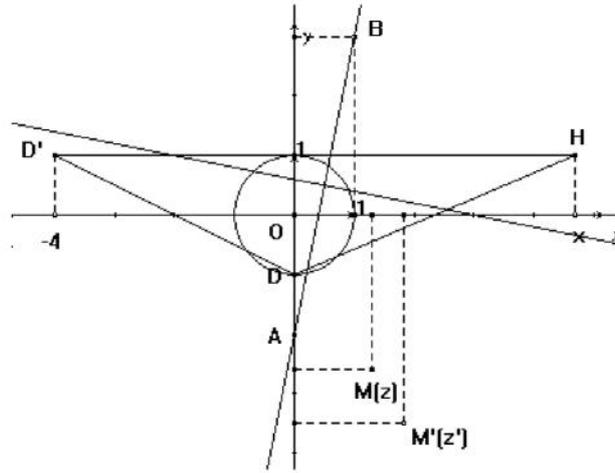
1°) a)  $z' = z_D = -4 + i.$

b)  $H(x + i) \quad x \geq 0.$

2°)  $E_1 = (AB) \setminus \{A\}.$

3°)  $E_2 = \{M(z) \in P \text{ tels que } |z'| = 1\}.$

b)  $E_2 = \text{méd}[AB].$



**Exercice4 :**

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$$

1°) a)  $f(x) - x = \frac{-x(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 3}$

b)  $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^2}$   
f

2°) a)  $] -\infty; 1]$       $I = [-1; 2[$

d)  $T : y = -x$

3°) a) déterminer  $f^{-1}(0)$  et  $f^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ .

b) Expliciter  $f^{-1}(x) = \frac{3(x-1) + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}}{2(x-2)}$

