Profs : BOUHOUCH AMEUR
SLIMANI AKRAM

Exercice N°1: (5 points)

On considère un triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le milieu de [BC].

1) Soit f une isométrie tel que f({B, C}) = {B, C}.
   a) Montrer que f fixe I.
   b) En déduire toutes les isométries f vérifiant f({B, C}) = {B, C}.
   c) Quelles sont ceux qui laissent ABC globalement invariant ?
2) Soit $D = S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme le triangle ABD en ACD.
   a) Montrer que g(B) = C et que g laisse I invariant.
   b) Déterminer les isométries g.
3) Caractériser l'isométrie $r = S_{(AD)} o S_{\Delta}$ où Δ est la médiatrice de [BD].
4) Soient M et N les point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

   Montrer que r(M) = N et en déduire que la médiatrice de [MN] passe par un point fixe.
5) a) Montrer que $S_{\Delta} o S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
   b) En déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi = r \text{ o } S_{(AB)}$.

Exercice N°2: (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur I=]−1; 1[par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur I.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que l'équation de $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$.
   b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ et que $\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.
   c) Donner le signe de $f(x) - x$ sur I.
3) Montrer que f réalise une bijection de I sur IR.
4) Tracer (ξ) et (ξ') les courbes représentatives respectivement de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(unité 2cm).
5) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$ pour tout $x \in$ IR.
6) Montrer que pour tout $x \in [\alpha; 1[$ on a $f'(x) \geq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^3$.
7) Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par $U_0 > \alpha$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.
   a) Montrer que $U_n > \alpha$ pour tout $n \in$ IN.
   b) Montrer que pour tout $n \in$ IN $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{\alpha}{\alpha+1})^3 |u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $|U_n - \alpha| \le (\frac{\alpha}{\alpha+1})^{3n}|U_0 - \alpha|$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

8) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)= 1+ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on note (C_g) sa courbe représentative dans ce même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Vérifier que $g(x)=1+f^{-1}(x-1)$ pour tout $x \in$ IR.

b) Montrer que (C_g) est l'image de (ξ) par une symétrie glissante que l'on caractérisera.

B) Soit φ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = f(\sin x)$ avec $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) Vérifier que $\varphi(x) = -1 + \tan(x)$ pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur $[-1;+\infty[$.

3) Montrer que φ^{-1} dérivable sur $[-1;+\infty[$ et calculer $(\varphi^{-1})'(x)$.

Exercice N°3: (3 points)

1) Dans la figure ci-dessous, on donne les courbes C et Γ d'une fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et sa fonction dérivée g' .

Par une lecture graphique, distinguer la courbe de g et celle de g' .

2) On admet que $g(x)=\frac{1}{\cos x}$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Montrer que le point d'intersection de C et Γ a pour abscisse $\frac{\pi}{4}$.

3) Soit un réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ On considère, dans C , l'équation :

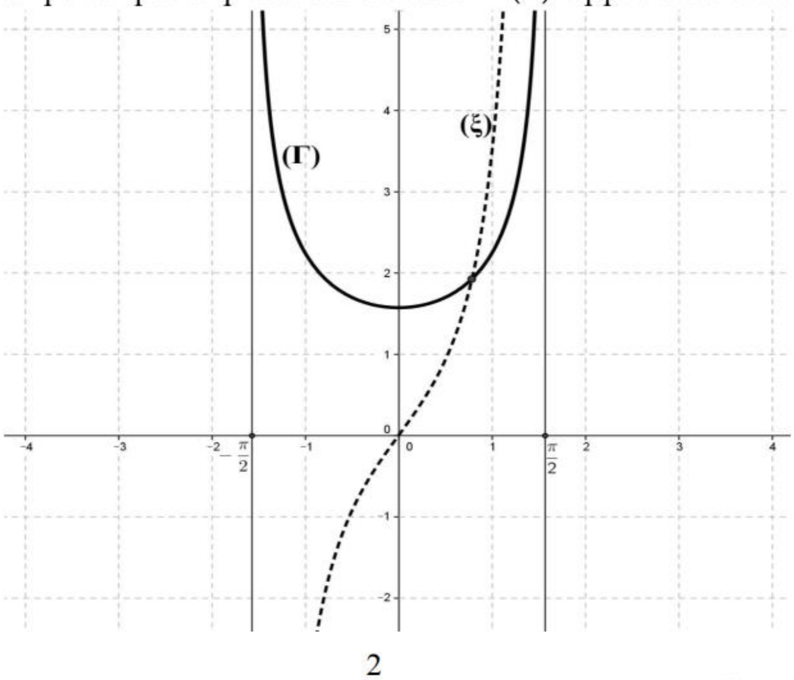
$(E_\alpha):(\cos^2\alpha)z^2-(e^{i\alpha}+\cos^2\alpha)z+e^{i\alpha}=0$.

a)Vérifier que le réel 1 est une solution de (E_α) .

b) En déduire la deuxième racine $U(\alpha)$ de (E_α) .

c) Ecrire $U(\alpha)$ sous forme algébrique et vérifier que $U(\alpha)=g(\alpha)+ig'(\alpha)$.

d) Déterminer le réel α pour que le point M d'affixe $U(\alpha)$ appartient à la droite $\Delta : y = x$.



Exercice N°4: **(5 points)**

A) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3 - 6(2+i)z^2 + (36+54i)z - 108i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle a et une solution double b à préciser.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A , A_0 ,A_1 et A'_1 d'affixes respectives : 3, 6 , $3(1+i)$ et $3(1-i)$. Déterminer la nature du quadrilatère $OA'_1A_0A_1$.

B) Pour tout réel $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on considère l'application f_α du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = e^{i\alpha}z + 3(1-e^{i\alpha})$.

1) a) Montrer que f_α est une isométrie.

b) Montrer que f_α admet un seul point invariant qu'on précisera.

2) a) Vérifier que $z'-3 = e^{i\alpha}(z-3)$.

b) En déduire que la médiatrice du segment [MM'] passe par un point fixe qu'on précisera.

3) Vérifier que $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = iz + 3(1-i)$ et que $A_1 = f_{\frac{\pi}{2}}(A_0)$.

4) Pour tout n $\in$ IN*, on pose $A_n = f_{\frac{\pi}{2^n}}(A_{n-1})$.

Montrer, par récurrence, que pour tout n $\in$ IN* , $A_n = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}(A_0)$.

5) a) Déterminer les coordonnées $(X_n ; Y_n)$ du point A_n en fonction de n.

b) Trouver les limites des suites (X_n) et (Y_n).

BON TRAVAIL