

Lycée Pilote Bizerte : Mme Lamia Khemiri
 Lycée Pilote Monastir : F . Zemni
 M . Hassine – H . Yakoubi – M . Krir
 Lycée Rue Fattouma Bourguiba :
 A . Abbes
 Lycée Hédi Khéfacha :
 M . Mansour – I . Aguir
 Lycée Bennane-Bodheur : A . Bouhouch
 Lycée Privé International : F. Zemni

Devoir de synthèse n°1 4 Math

MATHEMATIQUES

Durée : 3 h

Le 15/12/2020

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - \frac{1}{5}(x^2 - 5)$ et U la suite définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{5} \leq U_n \leq \frac{5}{2}$
 c) Montrer que U est monotone, en déduire que U est convergente puis déterminer sa limite
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{5}(U_n - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5} - U_n)$
 b) On pose $\lambda = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - \sqrt{5} \leq \lambda(U_n - \sqrt{5})$
 c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - \sqrt{5} \leq \frac{\lambda^n}{3}$.
 d) Retrouver alors la limite de la suite U .
- 3) Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{5} \leq S_n \leq \sqrt{5} + \frac{1}{3n} \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right)$
 b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 4) On donne $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sigma_n = 5n + \frac{25}{2} - 5U_n$.
 b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_n}{n}$
- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ et $V_n = \frac{1}{P_n}$
 a) Donner un encadrement de P_n
 b) En déduire que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 2 : (5 points)

A) Soit m un nombre complexe non nul.

On considère, dans \mathbb{C} , l'équation $(E_m) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$.

1) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$.

2) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation (E_m) .

B) Dans cette partie, on suppose que $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i, m, $z_1 = \frac{(1-i)(m+i)}{2}$

et $z_2 = \frac{(1+i)(m+1)}{2}$. Soit I le milieu du segment [AB].

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point N d'affixe z associe le point N' d'affixe z' tel que $z' = iz + 1$.

1) a) Montrer que f est une isométrie.

b) Montrer que I est le seul point invariant par f.

c) Montrer que f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Vérifier que $f(M_1) = M_2$.

2) a) Vérifier que $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = i \cdot \frac{m-1}{m-i}$.

b) En déduire que si M est situé sur le cercle (Γ) de diamètre [AB], alors les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

3) a) Vérifier que $z_2 - z_1 = im$ et déduire que $M_1M_2 = OM$, ainsi que la position relative des droites (M_1M_2) et (OM) .

b) Montrer que $\vec{IM}_1 + \vec{IM}_2 = \vec{OM}$.

c) On a tracé dans la page annexe le cercle (Γ) de diamètre [AB] et on a placé sur (Γ) le point M. Construire, en justifiant, les points M_1 et M_2 .

Exercice 3 : (5 points)

Dans la figure ci - contre ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB]; [AD]; [DC] et [BC]

On note : $f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{KB}}$ et $g = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{JI}}$

1) a) Vérifier que : $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$.

b) Déterminer l'image du point K par $S_{(AB)} \circ t_{\vec{KB}}$

c) Déterminer alors la droite Δ' telle que $t_{\vec{KB}} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta'}$.

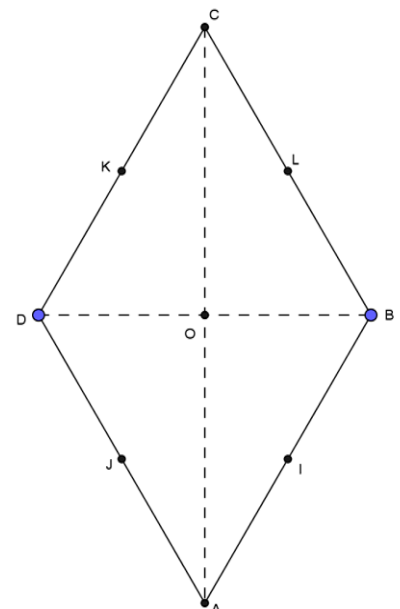
d) Caractériser alors l'isométrie f.

2) Les droites (DC) et (IJ) se coupent au point E

a) Montrer que le triangle OAE est équilatéral.

b) Déterminer les images des points J, O et D par g.

c) En déduire que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.



3) Soit h l'isométrie tel que $g \circ h = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$.

a) Montrer que $h = t_{\overline{BO}} \circ S_{(IJ)}$.

b) Montrer que $h \circ S_I = S_{(AC)}$.

4) Les droites (AC) et (IJ) se coupent au point H . On note Δ la droite passant par H et perpendiculaire à (AD). Les droites Δ et (AD) se coupent au point F .

a) Montrer que : $g \circ h = S_{(AD)} \circ S_H$.

b) En décomposant S_H en deux symétries orthogonales convenables, montrer que $g \circ h$ est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $2\overline{HF}$.

c) On note G le symétrique de A par rapport à la droite (HF) et N le symétrique de H par rapport au point F . Montrer que le quadrilatère GENH est un parallélogramme.

Exercice 4 : (5 points)

On donne dans l'annexe ci-jointe la courbe C_f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Les axes du repère sont des asymptotes à C_f .

On suppose que $f(1) = c$ avec $c \in]0, 1[$.

La tangente T à C_f au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $c + \frac{1}{2}$.

I) Par une lecture graphique donner le tableau de variation de f .

2) a) Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente T est : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + c$

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \sqrt{x+1}) - c}{x} = -\frac{3}{4}$.

II) On suppose de plus que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2 + x}$.

On note h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x}{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que h est continue et dérivable à droite en 0.

b) Montrer que h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de h .

2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - f^2(x)$

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\beta \in]0, +\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$

c) En déduire la position relative de C_f et C_h

d) On a placé sur l'annexe le réel β sur l'axe des abscisses.

Construire le point d'intersection de C_f et C_h puis tracer C_h sur l'annexe.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{f(k)}{k}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$ on a : $\frac{f(2n)}{2n} \leq \frac{f(k)}{k} \leq \frac{f(n)}{n}$

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$

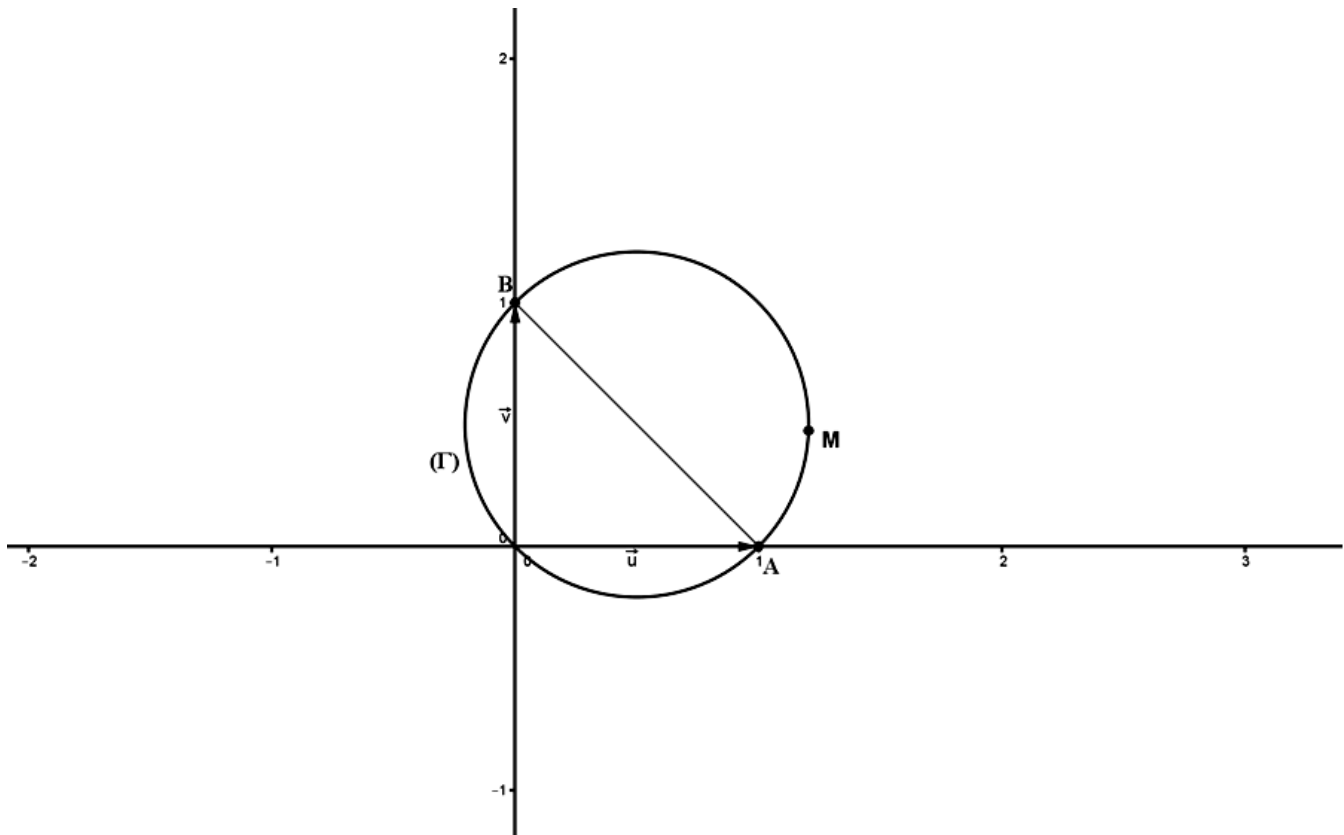
4) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $\frac{1}{x+1} \leq f(x)$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = 0$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom :

Exercice 2 :



Exercice 4 :

