

Devoir de synthèse N°1 mathématiques

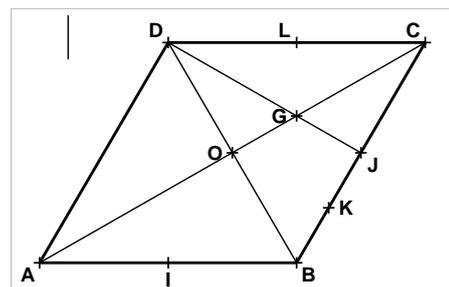
4ème Maths

Décembre 2020

Durée 3h

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$; et on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [BJ]$ et $[CD]$ et par G le centre du gravité du triangle BCD



- 1) a) Caractériser $f = S_{(DI)} \circ S_{(DB)}$
 - b) Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$ où E est l'image de C par f
- 2) Soit g la rotation de centre G et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
Déterminer la droite Δ tel que $g = S_{(DJ)} \circ S_{\Delta}$. Caractériser alors l'application $g^{-1} \circ f$
- 3) Soit h une isométrie du plan qui vérifie : $h(A) = B$, $h(B) = D$ et $h(C) = E$
 - a) Montrer que $h = S_{(DJ)} \circ S_O$ où S_O est la symétrie centrale de centre O
 - b) Déterminer $t_{\overrightarrow{JB}} \circ h(O)$ et $t_{\overrightarrow{JB}} \circ h(I)$
 - c) En déduire que h est une symétrie glissante dont-on déterminera le vecteur et l'axe
- 4) Soit \mathcal{F} l'ensemble des isométries F qui transforme le segment $[AC]$ en le segment $[EB]$
 - a) Montrer l'équivalence : (F appartient à \mathcal{F}) si et seulement si (Γ le segment $[AC]$ est globalement invariant par $H = S_{(DI)} \circ F$)
 - b) En déduire l'ensemble \mathcal{F}

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; Soit m un nombre complexe

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_m) : (i - 1)z^2 + (1 - i)(m - i)z - 2(m - i)^2 = 0$.
- 2) Soit les points M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 les solutions de (E_m)
Déterminer les ensembles décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque m varie et $\text{Arg}(m) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- 3) Soit f une application du P vers lui-même tel que à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + im)\bar{z} + (1 - i)(m - i)$
 - a) Montrer que f est une isométrie de P si et seulement si $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $] -\pi; \pi[$
 - b) On prend $m = i + e^{i\theta}$ et soit M un point de P d'affixe z et $M'' = f \circ f(M)$
Montrer que z'' l'affixe de M'' est donné par $z'' = z + (1 - i)(e^{i\theta} - 1)$
En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant
 - c) On prend $m = 1 + i$. Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f
 - d) Pour $m = i + e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$
Soit A le point d'affixe 1 ; Déterminer les affixes des points $A' = f(A)$ et $A'' = f(A')$
Montrer que f n'est pas une translation puis donner la nature de f

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f
b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left] \frac{4}{5}; 1 \right[$
c) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]0; 1[$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f .
b) Construire la courbe (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
c) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$
d) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $]0; 1[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.
- 3) Pour tout $x \in]0; 1[$, on pose : $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x})$
 - a) Montrer que h est dérivable sur $]0; 1[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0; 1[$
 - b) Etudier la dérivabilité de h à gauche en 1
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k h\left(\frac{1}{k}\right)$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $t_n = \sqrt{2n}$. Donner alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{n}} h\left(\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \sqrt{2 \cotan(x)}$.

- 1) a) Etudier la dérivabilité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu
a) Montrer que g réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur $]0; +\infty[$ on note g^{-1} sa fonction réciproque
b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{-4x}{x^4+4}$
- 2) On pose pour tout $x \in]0; +\infty[$, $k(x) = g^{-1}(\sqrt{2x}) + g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$
 - a) Montrer que k est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $k'(x) = 0$
 - b) Calculer $k(\sqrt{2x})$ puis déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $g^{-1}(\sqrt{2x}) = \frac{\pi}{2} - g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}(\sqrt{2k})$ et $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\right)$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g^{-1}(\sqrt{2n}) \leq U_n \leq g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$
 - b) En déduire que si (U_n) est convergente vers un réel c alors $0 \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ et (V_n) converge vers $\frac{\pi}{2} - c$