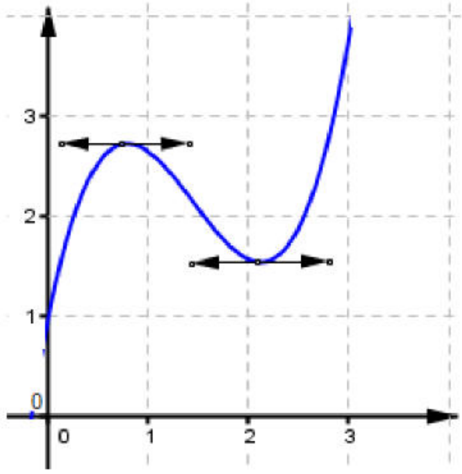
Lycée I. K. Jemmel Classe : 4M	Devoir de Synthèse n°1 Mathématiques	Mr : Afli Ahmed A.S : 2019/2020

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

Exercice 1 :(2 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux.**

f est une fonction deux fois dérivable sur [0, 3]
La courbe ci-contre représente la fonction dérivée de f.



Alors :

1) $f(1) \geq f(2)$.

2) f réalise une bijection de [0, 3] sur f ([0, 3]).

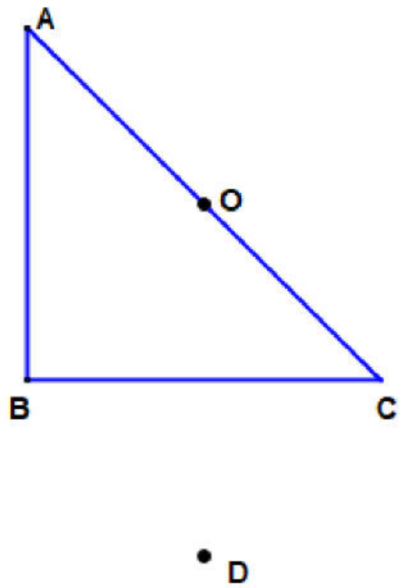
3) La courbe de f admet deux points d'inflexion.

4) $|f(2) - f(1)| \leq 3$

Exercice 2 :(6 points)

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O le milieu de [AC].

On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC).



1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(O) =D.

b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) Soit E = f(I) .Montrer que E est le milieu de [BD].

2) On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

a) Montrer que g est un déplacement.

b) Déterminer g(B) et g(C)

c) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

3) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$.

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].

a) Déterminer h(B) et h(D).

b) Montrer que $h = S_{\Delta} o\, t_{\overrightarrow{BO}}$

4) Déterminer l'ensemble des ponts M du plans tel que : $f(M) = h^{-1}(M)$.

Exercice 3 :(4 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1 \quad , \alpha \in]0, \pi]$

a) Déterminer P(1).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On désigne par Ω le point d'affixe z' telle que

$$z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\, z + 3(1 - \cos\alpha - i\sin\alpha)$$

a) Monter que pour tout $\alpha \in]\, 0, \pi]$ f_α possède un seul point invariant à préciser.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f_α.

Exercice 4 : (8 points)

Soit la fonction f définie sur I =] 0,1[par : $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x - x^2}}$.On désigne par (C_f) la courbe représentative de f un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout x de I, $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x - x^2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau variation de f.

2) a) Déterminer f ''(x) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

b) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

c) Tracer (C_f) et T.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

4) Soit h la fonction définie sur $]\, 0 , \frac{\pi}{2} [$ par $h(x) = \frac{1}{2} f\left(\cos^2(x)\right)$

5) a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; h(x) = cotan (2x).

b) Montrer que h réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

6) a) Soit ψ la fonction réciproque de h. Calculer ψ(0) ; ψ(1) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x)$.

b) Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$; $\psi'(x) = -\frac{1}{2(1 + x^2)}$

7) On pose $k(x) = \psi(x) + \psi(\frac{1}{x})$; $x > 0$.

a) Montrer que k est derivable sur $]0\,;+\infty[$ et Calculer $k'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\psi(x) + \psi(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

8) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \psi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [0,n]$; $\psi(2n) \leq \psi(n+k) \leq \psi(n)$

b) En déduire que : $\frac{\pi}{4} - \psi(n) \leq V_n \leq \frac{\pi}{4} - \psi(2n)$

c) Montrer que V est convergente et déterminer sa limite.

Bon travail