Lycée Feriana AS : 2019-2020	Devoir de Synthèse 1 Décembre 2019	4 Maths
Mathématiques	Hamdi Mabrouk	Durée:3heures

Exercice1 (5points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral de sens direct ABC. On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$et$[CB]$ et soit $D = S_O(A)$

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? justifier.
2) a-Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur B et B sur D.

   b-Justifier que f est une rotation et donner ses éléments caractéristiques.

   c-Soit K le milieu du segment$[BD]$.

   Prouver que le triangle CIK est équilatéral de sens direct.
3) Soit $g = foS_{(AB)}$.

   a- Quelle est la nature de g.

   b- Déterminer $gog(A)$.

   a) Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de g.
4) Soit (H) l'ensemble des isométries h qui transforment le triangle ABC en le triangle BCD et tel que $h(A) = C$.

   a- Etudier la nature de h si $h(C) = B$.

   b- Déterminer alors l'ensemble (H).

Exercice 2 (4points)

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(\pi x)}}$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
3) Montrer que l'équation$f(x) = x$ admet dans $]0,1]$ une unique solution α.
4) Soit $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}(\alpha + \frac{1}{n^2+k})$ pour tout $n \in IN^*$.

   a-Montrer que pour tout $n \in IN^*$. $\sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}(\alpha + \frac{1}{n^2+1}) \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}(\alpha + \frac{1}{2n^2})$.

   b- En déduire que $(S_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice3(6points)

Soit f une fonction dérivable sur IR tel que $f(0) = 0$ et f'sa fonction dérivée définie sur IR

par $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}}$.

La courbe (Cf) de f admet deux branches paraboliques de directions (xx') l'une au voisinage de $(-\infty)$et l'autre au voisinage de $(+\infty)$.

1) a) Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion.

b) Montrer que f est impaire (indication on pose $g(x) = f(x) + f(-x)$).

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

d) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a représenté La courbe (Cf) de f.

a) Dresser le tableau de variation de la fonctionf^{-1}.

b) Tracer dans le même repère La courbe (ζ') de f^{-1}.

3) Soit h la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = f(\frac{1}{2}tanx)$.

a) Montrer que h est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.

b) Montrer qu'il existe c $\in \left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4cos(c)}$.

Exercice4(5points)

On considère dans C l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$, avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

1) Montrer que : $z' = 1 - ie^{i\theta}$ est une solution de (E_θ), déterminer alors l'autre solution z" .

2) Soit R $=(O, \vec{U}, \vec{V})$ un repère orthonormé direct du plan A , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 2 , $1 - ie^{i\theta}$ et $1 + ie^{i\theta}$.

a) Montrer que les segments [OA] et $[M_1 M_2]$ ont le même milieu, calculer $M_1 M_2$.

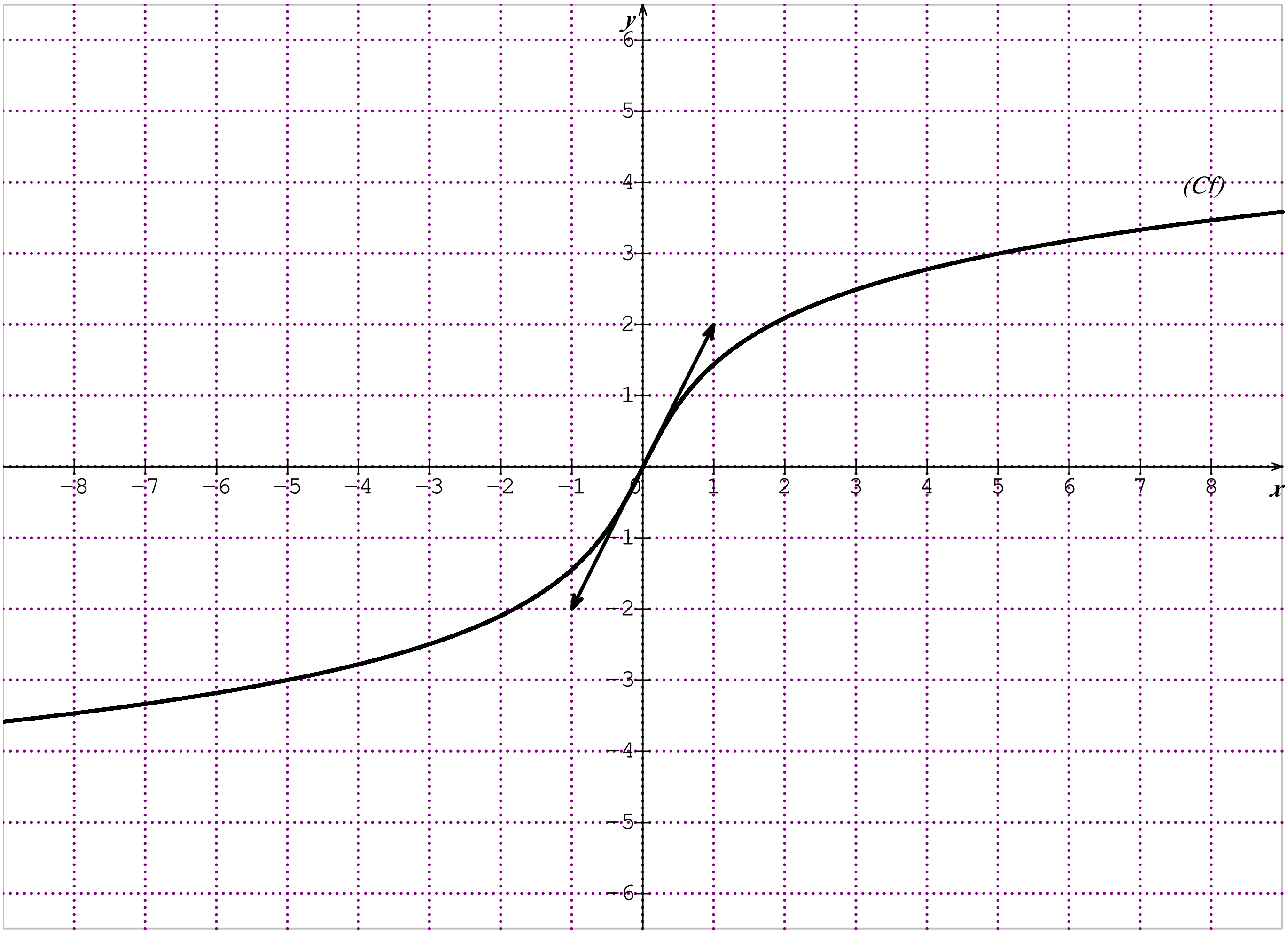
b) Montrer alors que $OM_1 AM_2$ est un rectangle.

c) Ecrire z' sous forme exponentielle .

d) Montrer que si $\theta = \pi$ alors $OM_1 AM_2$est un carré.

3) Pour $\theta = \pi$, Déterminer l'ensemble (E) de toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment [OA] .

Annexe (Exercice 3) Nom& prenom : ……………………………………..



Exercice 3 : (4 points)

Dans le orienté dans le sens direct on considère un triangle équilatéral de sens direct ABC. On désigne par I , J et O les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] et [BC] et soit $D = S_O(A)$.

0,5 1) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

0,5 2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en B et B en D.

0,75 b) Justifier que f est une rotation et donner ces éléments caractéristiques.

0,5 c) Soit K le milieux du segment [BD].

Prouver que le triangle CIK est équilatéral de sens direct.

3) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.

0,25 a) Quelle est la nature de f.

0,25 b) Déterminer gog(A).

0,5 Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) Soit (H) l'ensemble des isométries h qui transforment le triangle ABC en le triangle BCD et tel que h(A) = C.

0,5 a) Etudier la nature de h si h(C) = B.

0,5 b) Déterminer alors (H) .