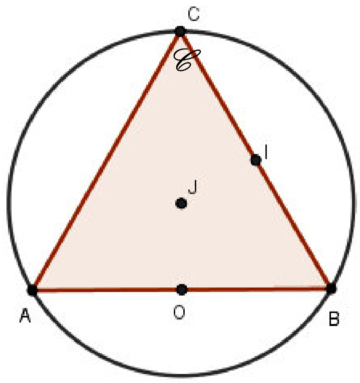
Lycée Pilote Monastir Lycée Hédi Khéfacha Profs : M . Mansour – I . Aguir H . Yakoubi – M . Hassine – Z . Ali	Devoir de Synthèse n° : 1 4 Math **MATHEMATIQUES** Durée : 4 h Le 05/03/2019

Exercice 1 : (5 points)

Soient ABC un triangle équilatéral de sens direct et ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit de centre J.
Soit O et I les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Recopier la figure sur votre copie et la compléter au fur et a mesure.



1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en I
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
   b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient à ($\mathscr{C}$).
   c) Montrer que les points Ω, A et I sont alignés.
   d) Construire alors Ω et montrer que le triangle $JB\Omega$ est équilatéral.

2) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et $R = S^{-1} \circ h$.
   Déterminer R(C) . Caractériser alors R.

3) Montrer qu'il existe une seule similitude indirecte f telle que f(J) = A et f(B) = C.
   a) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$ et que f(Ω) = B.
   b) Soit K le centre de f. Montrer que K appartient à (ΩC).
   c) Construire alors K, ainsi que l'axe Δ de f.

4) On suppose dans la suite que AB = 2 et on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OB}, \vec{v})$
   Montrer que l'écriture complexe de f est $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\bar{z} + \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ puis déduire l'affixe du point K.

5) Soit le point $M(\frac{1}{\cos\theta}, \sqrt{3}\tan\theta)$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   Montrer que M décrit une partie d'une hyperbole $\mathscr{H}$ dont les sommets sont les points A et B.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la conique (Γ) de foyer F(-2,0), de directrice associée au foyer F la droite D d'équation $x = -5$ et passant par le point K de coordonnée ($-1, \sqrt{3}$).

1) a) Montrer que l'excentricité de (Γ) est égale à $\frac{1}{2}$ puis déduire la nature de (Γ).
   b) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$
   c) Préciser le centre ,les sommets , le second foyer et la deuxième directrice de (Γ).

2) Pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on note $M_\theta\left(2\cos\theta - 1, \sqrt{3}\sin\theta\right)$ et $N_\theta\left(3, \frac{3-6\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}\right)$
   a) Vérifier que M_θ appartient à Γ et qu'une équation cartésienne de la tangente T_θ en M_θ à Γ est :
   $3x\cos\theta + 2\sqrt{3}y\sin\theta + 3\cos\theta - 6 = 0$.
   b) Montrer que le triangle $ON_\theta M_\theta$ est rectangle en O et que la droite ($N_\theta M_\theta$) est tangente à Γ.

3) On note $C\left(\sqrt{3}-1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) Vérifier que C appartient à Γ puis construire le point C.

b) Construire la tangente T à Γ en C.

c) On désigne par I et J les points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées.

Construire les tangentes T_1 et T'_1 à Γ respectivement en I et J.

d) Tracer Γ.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$

A / 1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2[$.

c) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit $\lambda \in]0,1]$ et $\mathbf{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

a) Montrer que $\mathbf{A}(\lambda) = e^{1-\lambda} + \lambda \ln \lambda - \lambda$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathbf{A}(\lambda)$.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \le k \le n-1$, $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \le \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b) En déduire que pour tout entier $n \ge 2$, $S_n - \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) \le \mathbf{A}\left(\dfrac{1}{n}\right) \le S_n - \dfrac{1}{n}$

c) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$

4) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $V_n = \dfrac{e}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$

a) Etablir les égalités : $U_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ et $V_n = \dfrac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = V_n - U_n$

c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

B / 1) Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle [1,2]

2) Soit g la fonction définie sur $[1,\alpha]$ par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Montrer g réalise une bijection de $[1,\alpha]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = g(w_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \le w_n < \alpha$.

b) Montrer que la suite (w_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (w_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 4 : (5 points)

I / Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est une fonction paire.

3) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

a) Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2g(x^2)}{x^3}$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$

II / Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

On désigne par (C) la courbe de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que F est une fonction impaire.

2) Soit $x > 0$ et $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) Vérifier que $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ et déduire qu'il existe $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = x f(c)$

b) Prouver que F est dérivable à droite en 0 et donner une équation de la tangente T à (C) en O.

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln(1+4x^2)}{4x} \le F(x) \le \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{2x^2} \ln\left(\dfrac{1+4x^2}{(1+x^2)^2}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de F sur $[0,+\infty[$.

c) Justifier que $\dfrac{\ln(3)}{2\sqrt{2}} \le F(\sqrt{2}) \le \dfrac{\ln(3)}{\sqrt{2}}$.

d) Tracer l'allure de la courbe (C) de F.

Bon travail

et

bonne chance