| | | |
|---|---|---|
| Lycée Houmet Souk | Devoir de Synthèse N : 1 | 4 Mathématiques 1 |
| Prof : Loukil Mohamed | Durée : 3 Heures | 04 - 12 - 2018 |

## EXERCICE N : 1 ( 5 points )

Dans Le plan P orienté dans le sens direct ,on considère un triangle OAB rectangle en O tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ , $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit à ce triangle et $I$ le milieu de [ AB] .

**1 ) a )** Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme A en $I$ et O en B .

**b )** Justifier que R est une rotation .

**c )** On désigne par $\Omega$ le centre de R . Montrer que $\Omega$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

**2 ) a )** Soit $f = R \circ S_O$ . Montrer que f est une rotation et préciser son angle .

**b )** On note $\Omega'$ le centre de f . Determinier f ( O ) puis montrer que $[\Omega\Omega']$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$.

**c )** Prouver que les quadrilatères $IO\Omega'B$ et $IAO\Omega'$ sont des losanges .

**3 )** On pose : $\varphi = R \circ S_{(OA)}$ et K le milieu de [ OB ] .

**a )** Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(A)$ puis donner la nature de $\varphi$ .

**b )** Prouver que : $\varphi = S_K \circ S_{(OI)}$ .

**c )** Déduire que $\varphi(\Omega) = O$ puis caractériser $\varphi$ .

## EXERCICE N : 2 ( 4.5 points )

On considère dans £ l'équation **( E )** : $Z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + 1 = 0$ .

On désigne par $Z_1$ et $Z_2$ les solutions de **( E )** avec $|Z_1| > |Z_2|$ .

**I )** Sans chercher $Z_1$ et $Z_2$ prouver qu'elles sont **distinctes** et **non conjugués** .

**II )** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On donne les points A , B , I et J d'affixes respectives $Z_1$ , $Z_2$ , 1 et - 1 et C le milieu de [ AB ] .

**1 ) a )** Prouver que : $Z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

**b )** En utilisant $(Z_2 - Z_1)^2 = (Z_2 + Z_1)^2 - 4\, Z_1 Z_2$ , montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4(Z_C^2 - 1)$ .

**c )** Montre alors que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CI}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CJ}}) \equiv 0\ [2\pi]$ .Interpréter géométriquement ce résultat .

**2 )** Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle AIJ .On note par $Z_K$ l'affixe du point K centre de $(\mathscr{C})$.

**a )** Prouver que K est un point de l'axe $(O, \vec{v})$ .

**b )** On pose : $Z_K = i\,y$ avec y réel . Soit M un point du plan d'affixe Z .

Montrer que $M \in (\mathscr{C})$ équivaut à $|Z - i\,y|^2 = |1 - i\,y|^2$ .

**c )** Déduire que $M \in (\mathscr{C})$ équivaut à $Z\overline{Z} + i\,y\,(Z - \overline{Z}) = 1$ .

**d )** En remarquant que $Z_1 = \dfrac{1}{Z_2}$ , montrer que le point B est un point de $(\mathscr{C})$.

**3 ) a )** Construire le point C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**b )** Construire la droite ( AB ) et la médiatrice du segment [ AB ] .

**c )** Déduire une construction des points A et B .

## EXERCICE N : 3 ( 3.5 points )

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit $R : P \to P$ ; $M_Z \mapsto M'_{Z'}$ tel que : $Z' = -i\,Z + 1 - i$ .

**1 )** Caractériser R .

**2 )** Donner l'écriture complexe de $R^{-1}$ .

**3 )** Résoudre dans £ l'équation : $a^3 = 8$ . ( **Ecrire les solutions sous forme cartésienne** )

**4 )** On considère dans £ l'équation **E ) :** $i\,Z^3 + 3(-1+i)\,Z^2 - 6\,Z - (10 + 2\,i) = 0$ .

**a )** Montrer que : Z est une solution de **E )** si et seulement si Z ' est une racine cubique de 8 .

**b )** Déduire alors les solutions de **E )** . ( **Ecrire les solutions sous forme cartésienne** )

**5 )** On note par : $Z_A$ , $Z_B$ et $Z_C$ les solutions de **E )** tels que $Re(Z_A) < Re(Z_B) < Re(Z_C)$.

**a )** Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC . Justifier

**b )** Construire le triangle ABC .

## EXERCICE N : 4 ( 7 points )

**A )** Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par **( C f )** sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1 ) a )** Montrer que f est dérivable à droite de 0 .

**b )** Dresser le tableau de variations de f .

**2 ) a )** Montrer que $f$ est une bijection de $[\,0\,;+\infty\,[$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera .

**b )** Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ .

**B )** Soit $g$ la restriction de $f$ sur $[\,0\,;1\,]$ , on définie sur IN la suite $(U_n)$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

**1 ) a )** Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < U_n \leq 1$ .

**b )** Vérifier que pour tout $x \in\,]\,0\,;1\,]$ on a : $g(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

**c )** Déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$ puis déduire que $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$ .

**d )** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .

**2 )** Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ , $U_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .

**3 )** On pose pour tout $n \in IN$ , $V_n = \dfrac{2^{n+3}U_{n+1}}{1+(U_{n+1})^2}$ , $W_n = 2^{n+2}\,U_n$ et $T_n = W_n - V_n$ .

**a )** Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n = \dfrac{2U_{n+1}}{1-(U_{n+1})^2}$ puis déduire que $T_n = U_n \cdot \dfrac{2^{n+3}(U_{n+1})^2}{1+(U_{n+1})^2}$.

**b )** En utilisant la question **B ) 1 ) c )** , montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 < T_n \leq \dfrac{1}{2^{n-3}}$.

**c )** Montrer que $W$ est décroissante et déduire que $W$ et $V$ convergent vers la même limite **L** .

**d )** En utilisant la question **B ) 2 )** , montrer que : $\mathbf{L} = \pi$ .

Bonne chance