

Direction régionale de l'éducation Tunis 1	<u>Devoir de Synthèse n° : 1</u> <u>Mathématique</u>	Année scolaire 2016/2017
Lycée : El Montazeh Mourouj 2	Durée : 3 H	Classe : 4^{ème} Math
Mr : Gary Badreddine	Date : 03/01/2016	Coefficient : 4

Le sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2.

Exercice 1 : (7 pts)

Dans le plan orienté, on considère un carré **ABCD** de centre **I** et tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

- I.** On désigne par **J** et **K** les milieux respectifs de **[AD]** et **[CD]**, par **C'** le symétrique de **C** par rapport à **D**, et on désigne par R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectives **D** et **B** et par S_I la symétrie centrale de centre **I**.
- 1.** Soit $f = R_D \circ S_I \circ R_B$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - 2.** On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.
 - a)** Déterminer $g(C)$ et (D) .
 - b)** En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.
 - 3. a)** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)}$.
 - b)** En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)}$ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.
- II.** Soit Ω le point de concours des bissectrices intérieures du triangle **ABD**. On désigne par r la rotation de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre **D** et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 1.** Construire le point **A'** image de **A** par r' .
 - 2.** Donner la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.
 - 3.** Montrer que $\Omega A' = \Omega A$ et les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

Exercice 2 : (13 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

I. 1. Étudier les variations de f .

2. a) Écrire une équation de la tangente \mathbf{T} à (\mathcal{C}) au point d'abscisse $\mathbf{0}$.

b) Étudier la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à \mathbf{T} .

c) Tracer (\mathcal{C}) et \mathbf{T} .

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle \mathbf{J} que l'on précisera.

b) Tracer la courbe (\mathcal{C}') de g^{-1} dans le même repère.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{J}$.

II. 1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.

2. Montrer que $\forall x \in]1, 2[: |g'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3. Soit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 \in]1, 2[\\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \in]1, 2[$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$.

III. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -1 + \left[f\left(\frac{1-\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}\right) \right]^2 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1. Montre que h est continue en $\frac{1}{2}$. Et que $\forall x \in [0, 1] : h(x) = \cos(\pi x)$.

2. Étudier les variations de h . En déduire que h réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

3. Montrer que $h^{-1}(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer $(h^{-1}(x))'$ $\forall x \in] -1, 1[$.