

DEVOIR DE SYNTHESE N°01

MATHEMATIQUES

4^{ème} MATHS 1

A S : 2015-2016 *** DUREE : 3heures

Le sujet comporte 4 pages

EXERCICE 1

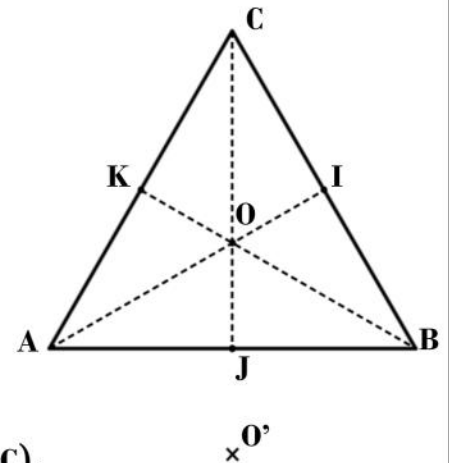
5 points

Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

- I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AB] et [AC].
- $O' = S_{(AB)}(O)$.



- 1) Montrer que B O A O' est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$.
- 2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$.
b) Préciser l'angle de φ . En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre.
- 3) Soit $g = t_{\overline{CB}} \circ \varphi$.
a) Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.
b) En déduire que g est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.
- 4) Soit ψ l'antidépacement tel que $\psi(B) = C$ et $\psi(O') = O$
a) Montrer que ψ est une symétrie glissante d'axe (IJ).
b) Déterminer $S_{(IJ)}(B)$. En déduire le vecteur \vec{u} de ψ .
- 5) Soit Ω l'intersection de (BK) et (IJ). On pose $h = S_{\Omega} \circ \psi$
a) Déterminer $h(J)$. En déduire que h est une symétrie orthogonale.
b) Vérifier que $S_{\Omega} = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$. En déduire que : $h = S_{(BK)} \circ t_{\vec{JI}}$
c) Déterminer l'axe de h .

EXERCICE 2

3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

- 1) Montrer que g est une isométrie.
- 2) a) Montrer que g n'admet pas des points fixes.
b) En déduire que g est une symétrie glissante.
- 3) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 1 + 2i$ et $z_D = 2 + 2i$
a) Déterminer $g(A)$ et $(g \circ g)(O)$.
b) Caractériser alors g .

EXERCICE 3**6 points**

Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{2 - x}$.

On désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout $x \in]0, 2[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{2x-x^2}}$$

c) Dresser le tableau des variations de f .

d) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ sur $]0, +\infty[$.

On note g sa fonction réciproque.

e) Montrer que g est dérivable à droite en 0 .

2) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 .

b) Tracer dans le même repère C , T et C' la courbe de g .

c) Montrer que pour $x \in [0, +\infty[$, on a : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$.

On admet dans la suite que g est dérivable sur $]3, 4[$ et que pour tout $x \in]3, 4[$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{4}{25}$.

3) Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}x$ admet dans $]3, 4[$ une solution unique α .

4) On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 \in \left] \frac{\alpha}{2}, 2 \right[\\ U_{n+1} = g(2U_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{\alpha}{2} < U_n < 2$.

b) Montrer que $\left| U_{n+1} - \frac{\alpha}{2} \right| \leq \frac{8}{25} \left| U_n - \frac{\alpha}{2} \right|$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 4**6 points**

Dans la figure ci-jointe :

- C est la courbe d'une fonction f , continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ dans un repère orthonormé.
- La demi tangente à C au point $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ passe par le point $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- La droite $\Delta : x = \frac{\pi}{4}$ est une asymptote verticale à C .

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{f(x)}{x + \frac{\pi}{2}}$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g sa fonction réciproque.

c) Justifier la dérivabilité de g sur J .

d) Tracer C_f dans le même repère.

e) Dresser le tableau des variations de g .

2) Dans la suite de l'exercice, on admet que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f(x) = \frac{1}{1 - \tan x}$.

a) Montrer que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

3) Soient h et k les fonctions définies sur $]4, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $k = g \circ h$.

a) Vérifier que si $x \in]4, +\infty[$ alors $0 < h(x) < \frac{1}{2}$.

b) Montrer que k est dérivable sur $]4, +\infty[$ et que pour tout $x \in]4, +\infty[$ on a :

$$k'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x} \left[2(h(x))^2 - 2h(x) + 1 \right]}$$

c) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que k réalise une bijection de $]4, +\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$.

d) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $k^{-1}(x) = 4 \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^2$.

Nom et prénom : 4^{ème} MATHS N°

