Devoir de synthése n°1

4ème Maths

Durée : 3heures

Profs: Mhamdi Mongi

Mhamdi Abderrazek

EXERCICE N°1: 3pts

Pour chacune des questions suivantes une et une seule proposition est exacte. Indiquer la lettre correspondante on ne demande aucune justification

1) Si $z_0, z_1, \dots\dots\dots z_{n-1}$ sont les racines nième de **1** alors : $z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1} =$

a) **1** b) $(-1)^n$ c) $(-1)^{n-1}$

2) Si f est une fonction continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$ telle que: $f(0) = f(2)$

a) f est constante sur $[0,2]$ b) f s'annule sur $[0,2]$ c) f' s'annule sur $]0,2[$

3) soit f une fonction dérivable sur IR telle que : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et soit g la fonction dérivable sur $IR/\{0\}$ définie par : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ alors $g'(x) =$

a) $\frac{x^2}{1+x^2}$ b) $\frac{1}{x^2(1+x^2)}$ c) $\frac{-1}{1+x^2}$

4) La transformation complexe R du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = -iz + 5 + i$ alors **R** est une rotation de centre **I** et d'angle α avec :

a) $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $et\ Z_I = 2 - 3i$ b) $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $et\ Z_I = 3 - 2i$ c) $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ $et\ Z_I = 2 + 3i$

EXERCICE N°2: 3pts

Soit (U_n) une suite positive, décroissante de limite nulle définie sur **IN**.

Et soit (E_n) la suite définie sur **IN** par :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.U_k = U_0 - U_1 + U_2 - \dots + (-1)^n.U_n$$

1) Montrer que la suite (E_{2n}) est décroissante et que (E_{2n+1}) est croissante

2) Montrer que $E_{2n+1} - E_{2n} \leq 0$

3) Déduire que (E_n) est une suite convergente

4) Soit **U** la suite définie par $U_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$; $n \in IN$

a) Montrer que **U** est décroissante et calculer sa limite

b) Vérifier que pour tout $n \in IN$ *on a* : $U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

d) Montrer que $E_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n+2} - \frac{(-1)^n}{n+3}$ et déduire $\lim_{n \to +\infty} E_n$

EXERCICE N°3: 3pts

Soit α un réel de l'intervalle $[0,\pi]$ et E_α l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$E_\alpha : z^2 - 2e^{i\alpha}z + e^{2i\alpha} + 1 = 0.$$

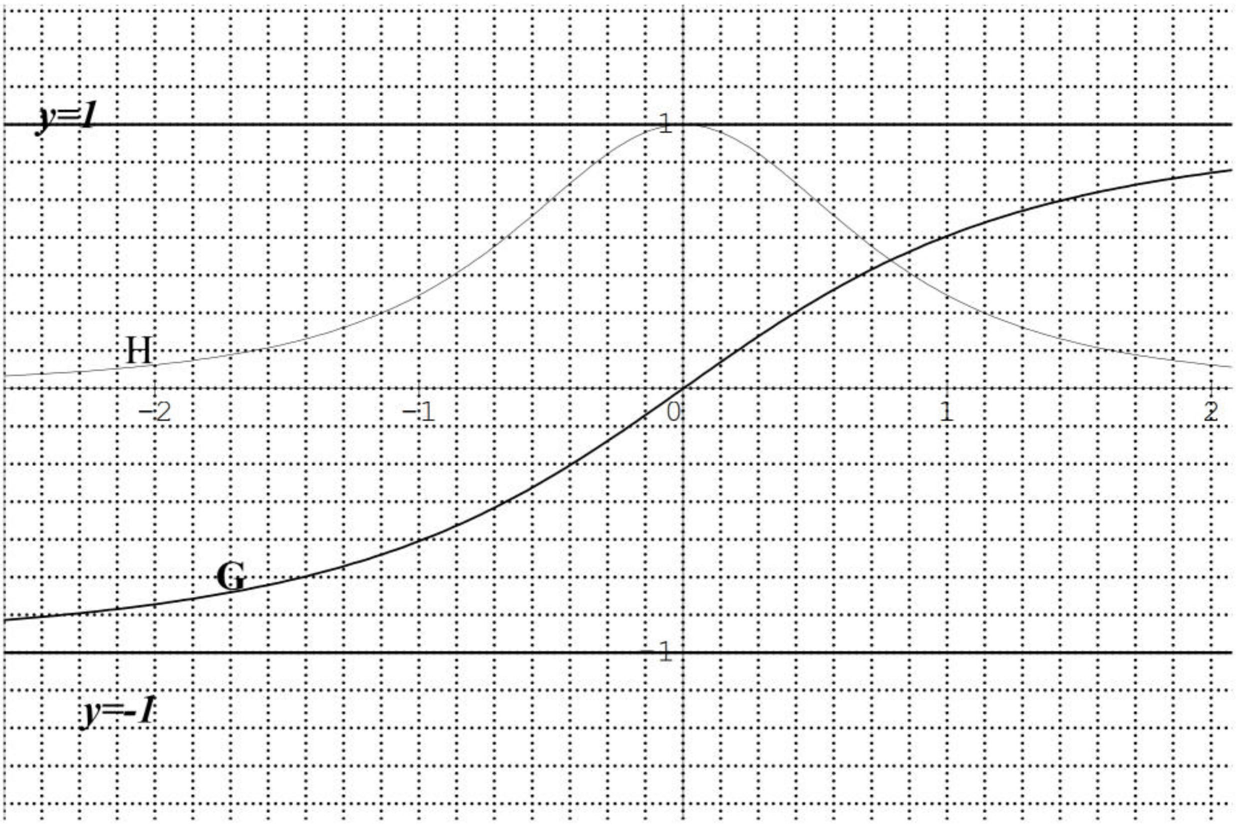
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_α.
2) Le plan **P** est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considère les points I, M, M' et M'' d'affixes respectives $e^{i\alpha}$, $ie^{i\alpha}$, $e^{i\alpha} - i$ et $e^{i\alpha} + i$.
   a) Montrer que I est le milieu du segment $[M'M'']$ et que $\overrightarrow{IM''} = \vec{v}$.
   b) Placer dans le plan **P**, les points I et M pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et construire
   les points M' et M''.
3) a) Montrer que **O** est un point du cercle **(C)** de diamètre $[M'M'']$ et que (OM) est la tangente à **(C)** en **O**.
   b) Déterminer $\alpha \in [0, \pi]$ pour que le triangle $OM'M''$ Soit isocèle en **O**.

EXERCICE N°4: 5pts

Dans le graphique ci-dessous on a tracé les courbes **H** et **G** représentatives respectivement des fonctions h et g définies sur **IR** par :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3} \quad et \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$$

qui se coupent en un point **A** d'abscisse $\alpha \approx 0,78615$



I) Donner le tableau de signe de : $g(x) - h(x)$

II) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Calculer $\lim_{+\infty} f \;\; et \;\; \lim_{-\infty} f$

2) Montrer que la droite Δ: $y = x - 1$ est une asymptote oblique à f au $v(+\infty)$

4) Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x = -\infty$ et interpréter le résultat

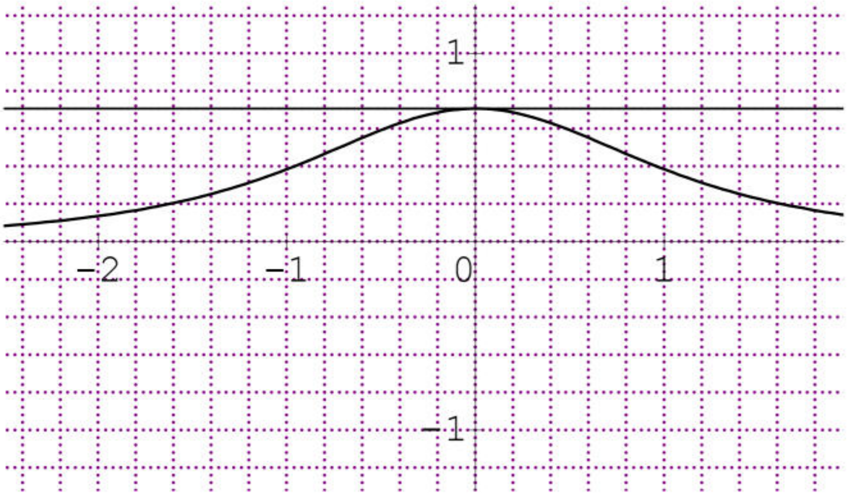
5) Montrer que f est dérivable sur IR et que : $f'(x) = g(x) - h(x)$

6) Dresser le tableau des variations de f

7) On admet que la droite d'équation $y = -2x$ coupe Γ_f la courbe de f au point d'abscisse $\beta = -1,4$ .Tracer Γ_f

III) Soit la suite (V_n) définie sur **IN** par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = g(V_n) \end{cases}$ pour $n \in IN$

On a tracé la courbe **(W)** représentative de la fonction g' dérivée de **g** et la droite **(D)** d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$



1) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < V_n \leq 1$

2) Montrer que (V_n) est une suite décroissante

3) Montrer que (V_n) est une suite convergente et calculer sa limite

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $V_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} V_n$

b) Déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $V_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

c) Retrouver la limite de (V_n)

EXERCICE N°5: 6pts

Dans l'annexe ci-joint, on considère le triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et les deux triangles ACD et ABE isocèles et rectangles en A.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[CD]$, $[AC]$ et $[AD]$.

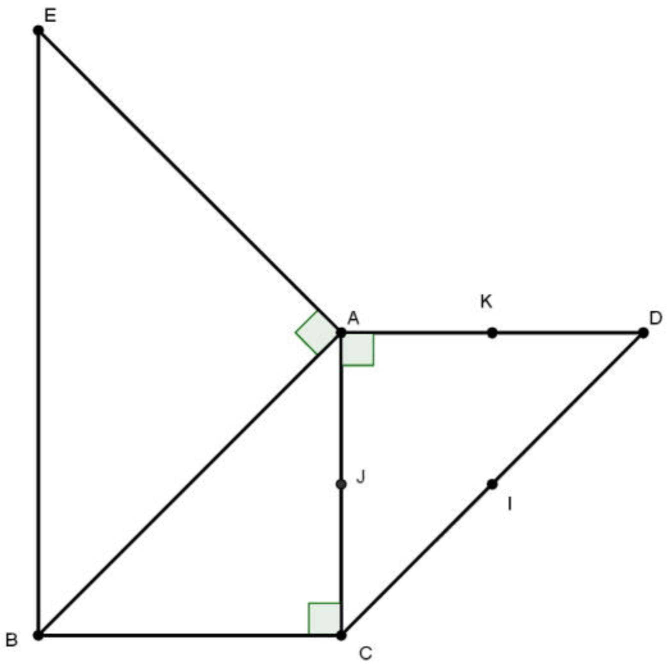
Soit f une isométrie qui envoie A sur D et C sur A

1. On suppose que f fixe un point
   a) Montrer que f est une rotation
   b) Donner les éléments caractéristiques de f
   c) Construire le point $F = f(B)$
   d) Montrer que les points A, C et F sont alignés
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f \circ R$
   a) Déterminer $g(E)$ puis caractériser g
   b) En déduire que $AEFD$ est un parallélogramme
3. On suppose que f est sans point fixe
   a) Montrer que f est une symétrie glissante
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de f
4. Soit φ la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et ψ la

   Symétrie glissante De vecteur $\overrightarrow{JK}$ et d'axe (JK) et $h = \varphi \circ \psi^{-1}$

   a) Quelle est la nature de h

   b) Déterminer $h(D)$ et $h(A)$; caractériser alors h



BON TRAVAIL

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHESE N°1:

EXERCICE N°1 :

1) $z^n = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1; \dots\dots\dots\dots.., n-1\}$

Alors $z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1} = e^{i0} \times e^{i\frac{2\pi}{n}} \times e^{i\frac{4\pi}{n}} \times \dots\dots\dots\dots. \times e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi(1+2+\cdots\dots+n-1)}{n}}$

Or $1 + 2 + \cdots \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ alors $z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1} = e^{i\frac{2\pi\frac{(n-1)n}{2}}{n}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

La réponse est C

2) $\boldsymbol{f}$ est une fonction continue sur $[\mathbf{0},\mathbf{2}]$, dérivable sur $]\mathbf{0},\mathbf{2}[$ et $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{2})$ .D'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel c tel que $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$

La réponse est C

3) $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{x}\right)' \boldsymbol{f}'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+x^2}$

La réponse est C

4) $z' = -iz + 5 + i$ on a : $|-i| = 1$ *et* $arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors R est une rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha} \equiv -\frac{\pi}{2}[\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$ et de centre I tel que :

$Z_I = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$

La réponse est b

EXERCICE N°2:

1) $E_{2(n+1)} - E_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k.U_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k.U_k = (-1)^{2n+2}.U_{2n+2} + (-1)^{2n+1}.U_{2n+1}$

$= U_{2n+2} - U_{2n+1} < 0$ car U est une suite décroissante

Alors $(\boldsymbol{E_{2n}})$ est décroissante

$E_{2(n+1)+1} - E_{2n+1}$

$= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k.U_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k.U_k = (-1)^{2n+3}.U_{2n+3} + (-1)^{2n+2}.U_{2n+2}$

$= U_{2n+2} - U_{2n+3} > 0$ car U est une suite décroissante

Alors (E_{2n+1}) est décroissante

2) $E_{2n+1} - E_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k.U_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k.U_k = (-1)^{2n+1}.U_{2n+1} = -U_{2n+1} \leq 0$

Car la suite U est positive

3) On a ; * $(\boldsymbol{E_{2n}})$ est décroissante et $(\boldsymbol{E_{2n+1}})$ est décroissante

* $E_{2n+1} \leq E_{2n}$

* $\lim_{n\to+\infty} E_{2n+1} - E_{2n} = \lim_{n\to+\infty} -U_{2n+1} = 0$

Donc les suites (E_{2n}) et (E_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers la même limite et par suite (E_n) est une suite convergente

4) a) Soit $f(x)=\frac{2}{x^2+4x+3}$ on a : $U_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=f(n)$; la suite et la fonction ont les mêmes variations f est une fonction rationnelle dérivable sur $[0,+\infty[$ $f'(x)=\frac{-2(2x+4)}{(x^2+4x+3)^2}<0$ pour tout $x\in[0,+\infty[$

alors U est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+4x+3}=0$

b) on a : $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)}=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=U_n$

c) Soit $t_n=\frac{(-1)^n}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{2n+1}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

d) On a : $E_0=\sum_{k=0}^{0}(-1)^k.U_k=(-1)^0.U_0=U_0=\frac{2}{3}$ et d'autre part

On a : $\frac{1}{2}+\frac{(-1)^0}{0+2}-\frac{(-1)^0}{0+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ la propriété est vraie pour n=0

Supposons que $\boldsymbol{E_n}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{(-1)^n}{n+3}$ et montrons que $\boldsymbol{E_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$

On a: $E_{n+1}=$

$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k.U_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.U_k+(-1)^{n+1}U_{n+1}=\boldsymbol{E_n}+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{(-1)^n}{n+3}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{(-1)^n}{n+2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$ **CQFD**

D'après le principe de récurrence on pour tout entier naturel n on :

$\boldsymbol{E_n}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{(-1)^n}{n+3}$ et on a : $\boldsymbol{E_n}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n=\frac{1}{2}$

EXERCICE N°3:

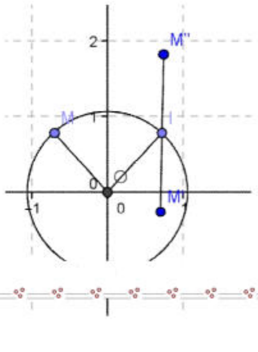
1) $\Delta=\left(-2e^{i\alpha}\right)^2-4\left(e^{2i\alpha}+1\right)=-4=(2i)^2$ alors 2i est une racine carrée deΔ

$z_1=\frac{2e^{i\alpha}-2i}{2}=e^{i\alpha}-i$; $z_2=\frac{2e^{i\alpha}+2i}{2}=e^{i\alpha}+i$ $S_C=\{e^{i\alpha}-i\ ;\ e^{i\alpha}+i\}$

2)a) $\frac{Z_{M'}+Z_{M''}}{2}=\frac{e^{i\alpha}+i+e^{i\alpha}-i}{2}=e^{i\alpha}=z_I$ alors I est le milieu du segment [M′M″]

Et on a : $aff\left(\overrightarrow{IM''}\right)=Z_{M''}-z_I=i=Z_{\vec{V}}$ alors $\overrightarrow{\mathbf{IM''}}=\vec{\mathbf{v}}$.

b)



3)a) $\frac{aff(\overrightarrow{OM''})}{aff(\overrightarrow{OM'})} = \frac{e^{i\alpha}+i}{e^{i\alpha}-i} = \frac{(e^{i\alpha}+i)(e^{-i\alpha}+i)}{(e^{i\alpha}-i)(e^{-i\alpha}+i)} = \frac{i\cos\alpha}{1-\sin\alpha} \in iIR$ alors OM'M'' est un triangle rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre [M'M''].

I le milieu de [M'M''] donc I est le centre du cercle alors [OI] est

Un rayon du cercle et on a : $\frac{aff(\overrightarrow{OM})}{aff(\overrightarrow{OI})} = \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}} = \boldsymbol{i} \in iIR$ donc (OM) est tangente au cercle

b) OM'M'' est isocèle en O équivaut à (OI) est la médiatrice de [M'M'']

Signifie que $\frac{aff(\overrightarrow{M'M''})}{aff(\overrightarrow{OI})} \in iIR \Leftrightarrow \frac{2i}{e^{i\alpha}} \in iIR \Leftrightarrow \boldsymbol{e^{i\alpha}} \in IR \Leftrightarrow \alpha \in \{0\,,\pi\}$

EXERCICE N°4:

I) $g(x) - h(x) \le 0 \quad pour\ tout \quad x \in]-\infty\,,\alpha]$

$g(x) - h(x) \ge 0\ pour\ tout \quad x \in [\alpha\,,+\infty[$

II)1) $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+x^2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = +\infty$ et

$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x^2} - x - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2+x^2}+x} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1 = 0$ alors la droite Δ: $\boldsymbol{y = x - 1}$ est une Asymptote oblique à $\boldsymbol{f}$ au $\boldsymbol{v}(+\infty)$

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2+x^2} + 2x + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

$= \lim_{x\to-\infty} - x\sqrt{\frac{2}{x^2}+1} + 2x + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}+2\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\infty$

4) $x \mapsto 2 + x^2$ est une fonction polynôme dérivable strictement positive Sur IR donc $x \mapsto \sqrt{2+x^2}$ est dérivable sur IR

$x \mapsto 1 + x^2$ Et $x \mapsto x$ sont deux fonctions polynômes dérivables Sur IR et $1 + x^2 > 0$ Alors $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur IR

Conclusion : $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{IR}$

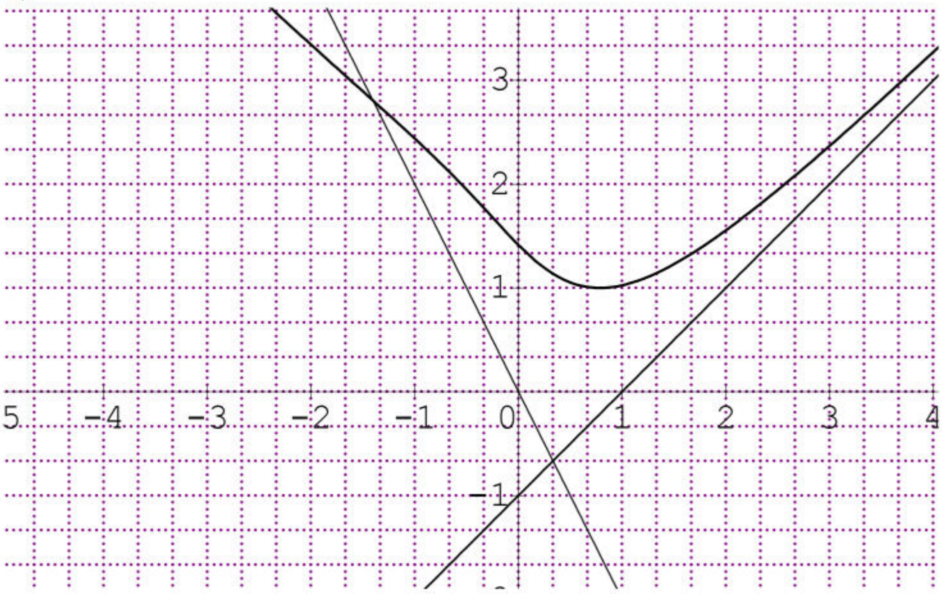
$$f'(x)=\frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}}-\frac{(x)'.\sqrt{1+x^2}-(x).(\sqrt{1+x^2})'}{\sqrt{1+x^2}^2}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{\mathbf{1+x^2}}^3}=$$

$g(x)-h(x)$

5)

X	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

6)



III)1) On a $0<\boldsymbol{V_0}=\mathbf{1}\le\mathbf{1}$ la proposition est vraie

Supposons que $0<V_n\le 1$ et montrons que $0<V_{n+1}\le 1$

On a : $0<V_n\le 1$ et g est une fonction croissante sur IR d'après la courbe représentative donc $g(0)<\boldsymbol{g(V_n)}\le g(1)$ alors $0<V_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\le 1$

D'après le principe de récurrence on a : pour tout $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{IN}$:

$\mathbf{0}<\boldsymbol{V_n}\le\mathbf{1}$

2) $V_{n+1}-V_n=\frac{V_n\left(1-\sqrt{2+v_n{}^2}\right)}{\sqrt{2+v_n{}^2}}=-\frac{V_n(1+v_n{}^2)}{\sqrt{2+v_n{}^2}.\left(1+\sqrt{2+v_n{}^2}\right)}<0$

donc $(\boldsymbol{V_n})$ est une suite décroissante

3) on a : $(\boldsymbol{V_n})$ est une suite décroissante minorée par 0 alors $(\boldsymbol{V_n})$ converge

On a : $V_{n+1}=g(V_n)$; (V_n) converge vers L ; $L\in[0,1]$

et g est continue sur $[0,1]$ alors $g(L)=L \Leftrightarrow L=L\sqrt{1+L^2} \Leftrightarrow L(1-$ $1+L2=0$

$$\Leftrightarrow L=0 \;ou\; \sqrt{1+L^2}=1 \quad \Leftrightarrow L=0$$

Donc $(\boldsymbol{V_n})$ converge vers zéro

4) a) On a : $\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } [0,1] \\ |g\prime(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; pour\; x \in [0,1] \text{ donnée par la courbe de } g\prime \end{cases}$

$v_n \in [0,1]$ $et\; 0 \in [0,1]$

D'après les inégalités des accroissements finis on a :

$|g(\boldsymbol{V_n})-g(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|\boldsymbol{V_n}-\mathbf{0}| \quad \Leftrightarrow |V_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|\boldsymbol{V_n}| \Leftrightarrow V_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{V_n}$

car $V_n>0$ et $V_{n+1}>0$

b) Principe de récurrence

c) On a : $0< V_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ car $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$

Alors $(\boldsymbol{V_n})$ converge vers zéro

EXERCICE N°5:

1)a) $\boldsymbol{f}$ fixe un point alors f est soit l'identité du plan soit une rotation soit une symétrie orthogonale. On a $f(A)=D \neq A$ donc f n'est pas l'identité du plan. Supposons que f est une symétrie orthogonale d'axe Δ

$S_\Delta(A)=D$ $alors$ $\Delta \perp (AD)$ et $S_\Delta(C)=A$ alors $\Delta \perp (AC)$ donc $(AD)\,et\,(AC)$ sont parallèles ceci est faux donc f n'est pas une symétrie orthogonale alors

$\boldsymbol{f}$ est une rotation

b) $\boldsymbol{f}$ est une rotation .soit α son angle on a :

$$\alpha \equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA})[2\pi]$$
$$\equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})+\pi[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{2}[2]$$

Le centre de f est l'intersection des médiatrices des segments $[AD]\;et\;[AC]$

Qui sont $(KI)\,et\,(IJ)$ donc I est le centre de f

c) construction du point F

d) $f(B)=F$ et $f(C)=A$ alors $(AF)\,et\,(BC)$ sont perpendiculaires

et comme $(AC)\,et\,(BC)$ sont perpendiculaires alors (AC) et (AF) sont parallèles

donc A, F et C sont alignés

2)a) $\boldsymbol{g(E)}=f°R(E)=f(B)=E$.

G est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle

Dont une mesure $\beta \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$ donc g est une translation et comme

$\boldsymbol{g(E)} = E$ Alors $g = t_{\overrightarrow{EF}}$

b) On a : $g(A) = f°R(A) = f(A) = D$ donc $t_{\overrightarrow{EF}}(A) = D$ alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ et par suite

EFDA est un parallélogramme

3)a) f est sans point fixe lors f est soit une translation soit une symétrie glissante .Supposons que f est une translation de vecteur $\vec{u}$

alors $t_{\vec{u}}(A) = D$ et $t_{\vec{u}}(C) = A$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$ ceci est impossible alors

f est une symétrie glissante

b) $f = t_{\vec{u}}°S_{\Delta} = S_{\Delta}°t_{\vec{u}}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

on a : $f°f = t_{2\vec{u}}$ et $f°f(C) = f(A) = D$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{CI}$

de plus $f(C) = A$ $alors$ $K \in \Delta$ et $f(A) = D$ $alors$ $J \in \Delta$ $donc$ $\Delta = (JK)$

Conclusion : $f = t_{\overrightarrow{CI}}°S_{(JK)}$

4a) $\boldsymbol{\varphi}$ est un déplacement et ψ est un antidéplacement alors $\boldsymbol{\psi^{-1}}$ est aussi un

Antidéplacement donc h est un antidéplacement

b) $h(D) = \varphi°\psi^{-1}(D) = \varphi(A) = D$ et on a : $h(A) = \varphi°\psi^{-1}(A) = \varphi(C) = A$

h est un antidéplacement qui fixe deux points distincts alors h est une symétrie orthogonale $\Rightarrow$ $h = S_{(AD)}$

BON TRAVAIL