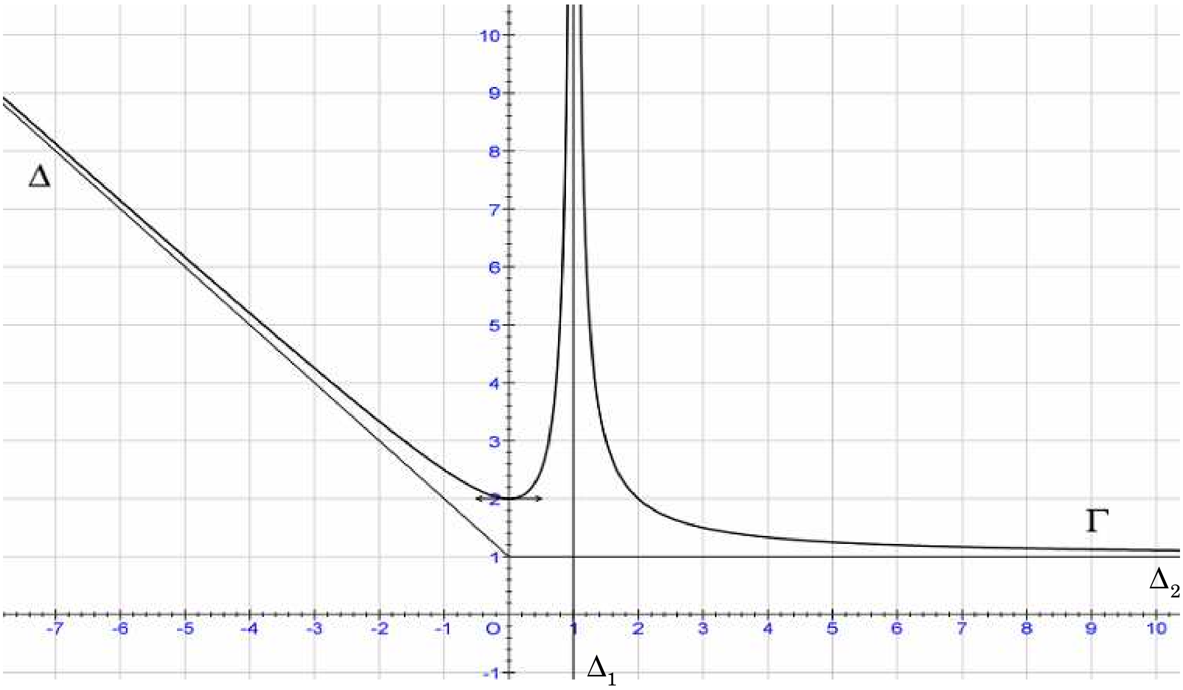
Lycée de Sbeïtla **Devoir de synthèse n° 1** « Année scolaire 2013 / 2014 »	Epreuve : **Mathématiques** Durée : 3 heures
Classe : $4^{\text{éme}}$ Maths 2	Prof : Elabidi Zahi

Exercice 1 : (4 points)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La droite $\Delta : y=-x+1$ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$, la droite $\Delta_1 : x=1$ est une asymptote verticale à Γ et la droite $\Delta_2 : y=1$ est une asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$



1) Par une lecture graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2f(x)-4}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} f\circ f(x) \ si \ x\neq 1 \\ 1 \ si \ x=1 \end{cases}$

a) Déterminer $g(2)$, $g(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

c) Déterminer l'image de $]-\infty;1[$ par g

Exercice 2 : (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul

On considère l'équation $(E) : z^2+iaz-(1+i)a^2=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives 1, a et $(-1-i)a$

Soit N le point tel que : $\begin{cases} ON = \sqrt{2}\,OM \\ \widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})} \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

a) Déterminer en fonction de a l'affixe z_N de N

b) Vérifier que M' et N sont symétriques par rapport à O

c) Montrer que le triangle OMN est rectangle isocèle en M

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $z_N \in \left]-\infty;0\right[$

4) On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$, où $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Ecrire $z_N - 1$ sous forme exponentielle

b) Déterminer la valeur de θ pour la quelle OAN est un triangle équilatéral

Exercice 3 : (4 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O

On désigne par I, J, et k les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$

1) Soit $f = S_{(AC)} \circ S_{(OI)}$. Caractériser f

2) On pose : $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BD)}$

a) Déterminer $g(A)$, $g(B)$ et $g(I)$

b) Soit $\Omega = g(K)$ .Montrer que $A = I * \Omega$

c) Déterminer la droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{OA}} = S_\Delta \circ S_{(BD)}$

d) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

3) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$

a) Déterminer $\varphi(A)$, $\varphi(I)$

b) Trouver l'ensemble des points du plan tels que $f(M) = g(M)$

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]1;+\infty\right[$ une unique solution α et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$

2) Soit g la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]1;+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $g^{-1}(x)$, pour $x \in J$

c) Montrer que pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$, $|g'(x)| \le \dfrac{1}{2}$

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $, \dfrac{3}{2} \leq u_n < 2$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) En déduire alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ par $h(x) = \begin{cases} g\left(\left(\dfrac{1-\tan x}{\tan x}\right)^2\right) & si\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que h est continue à droite en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$, $h(x) = \dfrac{1}{1-\tan x}$

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera

Avec mes encouragements