L.Ali bourguiba K. K Le 4/12/2012 Classe :4M$_2$ Durée : 2 H

Prof :Abdesslem Raoudha

Devoir de synthèse N1

Exercice1 :(3 points) Répondre par vrai ou faux

1)Si (U_n) est une suite décroissante et converge vers 0 alors les suites (U_n) et ($-U_n$) sont adjacentes

2)La suite réelle définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + n$ est une suite arithmétique

3) Pour tous réels a, b on a $|\cos(2a) - \cos(2b)| \le 2|a-b|$

4)Deux antidéplacements qui fixent un même point sont égaux

Exercice2 :(4points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit l'application f de P \{A} dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$ *et* soit les points A et B d'affixes respectives 1 et 1 - 2i

1)Montrer que f admet deux points invariants I et J qu'on précisera les affixes

2)Montrer que pour tout $M \neq A$, f o f (M) = M

3)a)Montrer que $OM' = \frac{BM}{AM}$ et déduire l'image de la médiatrice de [AB] par f

b)Montrer que $((\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$ et déduire l'image du cercle de diamètre [AB] privé de A

4)a)Calculer (z'-1)(z-1) et déduire que AM'.AM = 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b)Soit M un point d'affixe $1 + e^{i\alpha}$ où α est un réel donné , construire son image M' par f

Exercice 2 : (3 points)

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe on donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur IR et vérifiant $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$

1)Justifier que l'équation f (x) = x admet une solution unique α dans [-1 , 1]

2)Soit la suite réelle (U_n) définie sur IR par $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a)Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \in [-1, 1]$

b)Montrer que pour tout n , $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c)Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

3)Soit $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ pour tout n∈IN

Montrer que pour tout n , $f(\frac{1}{n}) \le V_n \le f(\frac{1}{n^2})$ et déduire la limite de (V_n)

Exercice4 : (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct .Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que ($\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit O , I et J les milieux respectifs des segments [AC] , [OB] et [BC] et soit D le symétrique de O par rapport à (BC) et N le point d'intersection de (AD) et (BC) . **Voir figure 2**

1)Montrer que I est le milieu de [AD]

2)a)Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme A en C et O en D

b)Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

c)Soit I' = f(I) montrer que I' est le milieu de [BD]

d)Déduire que les points O , N et I' sont alignés

3)Soit g = f o R où R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer g(O) et caractériser g

4)Soit h = S o f^{-1} où S est la symétrie orthogonale d'axe (AO)

a)Déterminer h(D) et h(C)

b)Montrer que h est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques

c)Déterminer l'ensemble des points M tel que h (M) = f^{-1} (M)

Exercice 5 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR_+ par f (x) = $\frac{1-x^2}{x^2+1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1)Dresser le tableau de variation de f

2)Montrer que f est une bijection de IR_+ sur un intervalle J que l'on précisera

3)Construire dans le même repère les courbes C_f et C_f^{-1}

4)soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par g (x) = f (tan(x)) si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et g($\frac{\pi}{2}$)= -1

a)Montrer que g est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

b)Montrer que pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, g(x) = $\cos(2x)$

c)Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur [-1 , 1]

d)Montrer que g^{-1} est dérivable sur] -1 , 1 [et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$

e)Soit G(x) = $g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que G est dérivable sur]-1,1[et préciser G'(x)

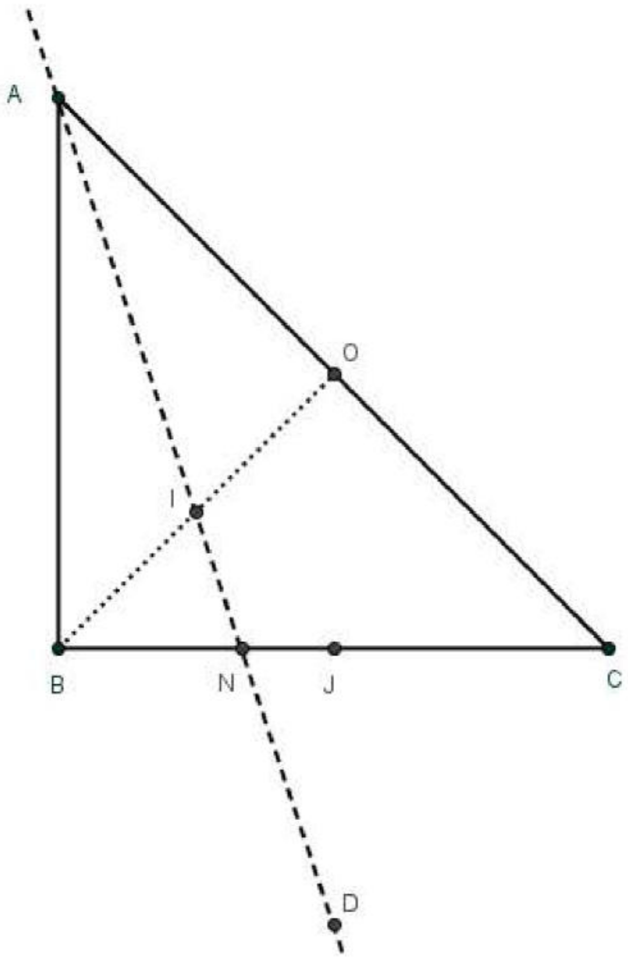
f)Montrer que G(x) = $\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$ .Que peut on conclure pou $C_{g^{-1}}$?

Nom et Prénom :……………………………………………………………………………………… Classe M_2

Figure 1 : (Ex2)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f ' (x)		-		+		-	
f(x)	2	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-2

Figure 2 : (Ex 4)



Correction du DS1

Exercice 1 : 1)V 2)F 3)V 4) F

Exercice 2 :

1)Soit M un point d'affixe z et invariant par f ,f(M) = M sig z = $\frac{z-1+2i}{z-1}$ sig z(z-1) =z-1+2i sig z^2 -2z +1 - 2i = 0

On a Δ=4.2i =$(2(1+i))^2$ et les solutions z_1 =-i et z_2 = 2+i ainsi il y a deux points invariants I(-i) et J(2+i)

2)Soit M≠A , $M(z) \xrightarrow{f}$ $M_1(z_1) \xrightarrow{f}$ M'(z') on a $z_1 = \frac{z-1+2i}{z-1}$ et z' = $\frac{z_1-1+2i}{z_1-1}$ d'où z'= $\frac{\frac{z-1+2i}{z-1}-1+2i}{\frac{z-1+2i}{z-1}-1}$ = $\frac{2iz}{2i}$ =z

3)a)On a z' = $\frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où $|z'|=\left|\frac{z-1+2i}{z-1}\right|$ d'ou OM' =$\frac{BM}{AM}$ et ainsi M ∈med [AB] eq OM' =1 eq M' ∈ $C(O,1)$

b)on a z' == $\frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où arg(z') ≡arg($\frac{z-1+2i}{z-1}$)$[2\pi]$eq $\left(\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]\right.$

ainsi M∈ C([AB])\{A } eq $\left(\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] ou\ M = B\right.$ eq $\left(\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right.$ et f(B) =O eq M ∈ $(o,\vec{v})$

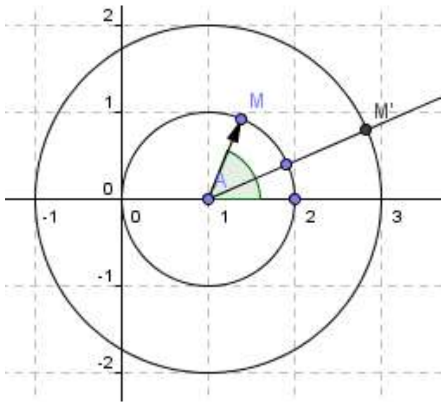
4)a)(z'-1)(z-1) =($\frac{z-1+2i}{z-1}$ -1)(z- 1) =2i Ainsi (z'-1)(z-1) =2i

eq $|(z'-1)(z-1)|=|2i|$ et arg((z'-1)(z-1))≡ $\arg(2i)$ $[2\pi]$

D'où AM'.AM = 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

b)M a pour affixe 1 + $e^{i\alpha}$donc z-1 = $e^{i\alpha}$ donc M∈ $C(A,1)$

d'apres 4)b)AM' = 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}-\alpha[2\pi]$ d'où la construction de M'



Exercie3 :

1)Soit g(x) = f(x) –x on a g est dérivable sur [-1,1] et g'(x) = f '(x) -1 < 0 car $|f'(x)| < \frac{1}{2}$, g(-1) = $\frac{1}{2}$, g(1) = $\frac{-1}{2}$

Ainsi g est continue sur [-1,1]

g(-1).g(1)<0 ⟹ l'équation g(x) =0 admet une seule solution α

g est strictement décroissante sur [-1 ,1] dans [-1 , 1]

2)a)$*\ pour\ n = 0$,U_0 = $\frac{1}{4}$ ∈ [-1 ,1]

$*\ On\ suppose\ que\ U_n$ ∈[-1,1](pour n ∈ IN) donc f(U_n)∈f([-1,1]) or f([-1,1])= [$\frac{-1}{2}$,$\frac{1}{2}$] ⊂ [-1,1] donc f(U_n) ∈[-1,1]

Ainsi U_{n+1} ∈ [-1,1]

b) On a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x ∈ [-1 ,1] ⟹ $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ ⟹ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c)On déduit que pour tout n ,$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{4} - \alpha\right|$ d'où (Un) converge vers 0 (car lim $(\frac{1}{2})^n$ =0)

3)Pour tout n ∈IN et pour tout entier k entre 1 et n on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2}$ et comme f est croissante sur [-1,1]

On déduit que f($\frac{1}{n^2}$) $\leq f(\frac{k}{n^2}) \leq f(\frac{1}{n})$ d'où $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$d'où a $nf(\frac{1}{n^2}) < nV_n < nf(\frac{1}{n})$

Et par suite $f(\frac{1}{n^2}) < V_n < f(\frac{1}{n})$. Comme lim f($\frac{1}{n}$) $= lim f(\frac{1}{n^2})$ =f (0) = $\frac{1}{4}$ (f est continue en 0)

Exercice 4 :

1)O et D sont symétriques par rapport à (BC) donc J=B $*$ C donc $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$ doncA$* D = B * O$

2)aOn a AO =CD en effet AO= CO =CD donc il existe un seul déplacement f / f(A) = C et f(O)=D

b)L'angle du déplacement f est $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

donc f est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ Comme BA=BC et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$Donc B et le centre de f

c)on a I =B $* O$ *donc* f(I) = f(B) $*$f(O) = B$*$D

d)Dans le triangle OBD /(BJ) et (DI) sont deux médianes donc leur point d'intersection N et le centre de gravité de OBD et comme I' =B $*$D donc O,N et I' sont alignés

3)g(O)=f o R(O)= f(O)=D , g est la composée de deux rotations dont la somme des angles est 0 donc g =$t_{\overrightarrow{OD}}$

4)a)h(D) = S o f^{-1} (D)=S(O)=O et h(C)=Sof^{-1}(C)=A

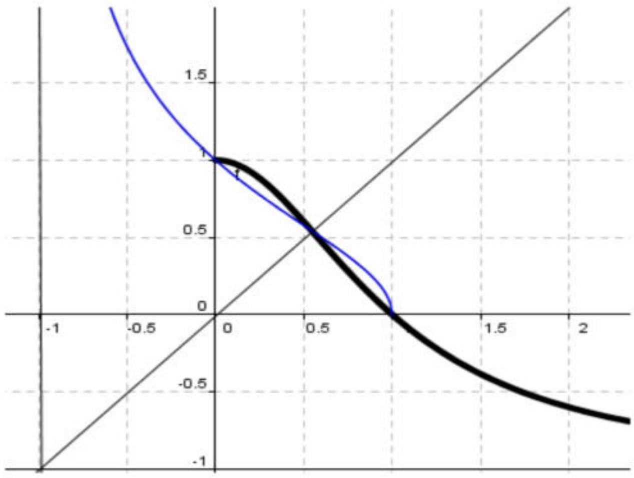
b)med[DO]≠med[CA] donc h est une symétrie glissante d'axe (JO) et de vecteur$\vec{u}$ = $\overrightarrow{Dh(D)}$ = $\overrightarrow{DO}$ (D∈ (JO))

c)h(M) = f^{-1}(M) eq S(f^{-1}(M)) = f^{-1} (M) eq f^{-1}(M) ∈ (AO) eq M ∈ f(AO) eq M ∈(CD)

Exercice 5:

1)f est dérivable sur IR+ et f '(x) = $\frac{-4x}{(x^2+1)^2} > 0$ sur IR*+

f'(x)	-
f	1 ↘ -1



2)f est continue et strictement décroissante sur IR+

Donc elle réalise une bijection de IR+sur f(IR+)=]-1,1]

4)la fonction tangente est continue sur[0,$\frac{\pi}{2}$[et f est continue sur IR+ donc g=h o tan est continue sur [0,$\frac{\pi}{2}$[et g est continue $en\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(tanx) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 = g(\frac{\pi}{2})$ *donc g est continue sur*$[0,\frac{\pi}{2})$

b)g(x)= $\frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$ = $\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x+sin^2x}$ = cos(2x) pour tout x≠ $\frac{\pi}{2}$ et cos(2$\frac{\pi}{2}$)=-1 =g($\frac{\pi}{2}$)

c)g est dérivable sur [0,$\frac{\pi}{2}$] et g'(x)= - 2sin(2x) < 0 sur]0,$\frac{\pi}{2}$ [donc g est strictement décroissante sur [0,$\frac{\pi}{2}$] Donc elle réalise une bijection de [0,$\frac{\pi}{2}$] sur f([0,$\frac{\pi}{2}$])= [-1,1]

d)g est dérivable sur [0,$\frac{\pi}{2}$] et g(x)≠ 0pour tout x∈]0,$\frac{\pi}{2}$[donc g^{-1} est dérivable sur g(]0,$\frac{\pi}{2}$[)=]-1,1[

et pour tout x∈]-1,1[]