

Mathématiques		 <h1 style="margin: 0;">Devoir de Synthèse N°1</h1>
Lycée Ghannouch		
4 ^{ème} Math	Durée : 3 heures	Prof: Taieb
Date : le 04/12/2012	Coefficient : 4	

Exercice n°1 : (2pts)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données. **En justifiant votre réponse.**

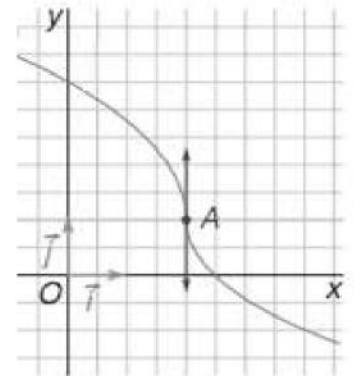
1- Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement croissante sur $[0, 1]$

Et dérivable sur $]0, 1[$. Si l'on sait de plus que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, alors :

- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$.
- L'équation $f'(x) = -2$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

2- (C) est la courbe représentative d'une fonction f passant par $A(2,1)$

- f n'est pas dérivable en 2
- A est un point d'inflexion de (C)



Exercice n°2 : (4pts)

A- On considère, dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = 0$

- Vérifier que 1 est une solution de (E)
- a- Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = (z-1)(z^2 + bz + c)$$

b- Résoudre, dans \mathbb{C} l'équation (E)

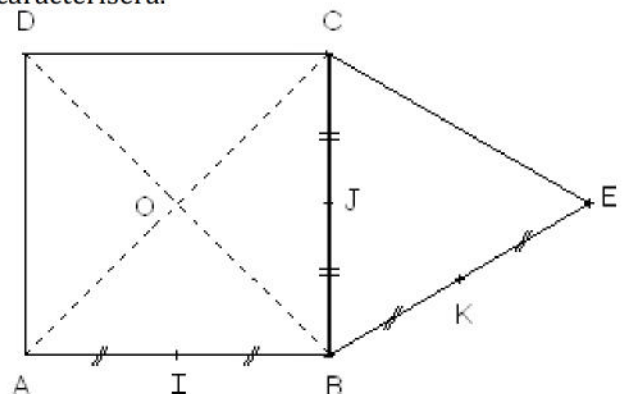
B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' \text{ telle que : } z' = i\bar{z} + 1 + i$$

- Montrer que f est une isométrie
- Montrer que f n'admet pas des points invariants
- On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 ; -1 ; 1+2i$ et $1+i$
 - Montrer que $f(A) = C$ et $f(B) = A$
 - Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice n°3 : (4pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.
 Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré direct de centre O et BEC est un triangle équilatéral direct.
 Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [CB] et [EB].



- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.
 - Caractériser f .
 - Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$
- Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante g qui envoie A sur C et B sur D.
- a- Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$

b- Caractériser $g \circ f$

c- En déduire la forme réduite de g

4) Soit h l'antidépacement qui envoie B sur E et C sur B

a- Déterminer $h(J)$ et $(h \circ h)(C)$

b- Montrer que h est une symétrie glissante et déterminer la forme réduite.

Exercice n°4 : (6pts)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1-a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Interpréter ces résultats graphiquement

b) Montrer que $f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$ puis dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

2-a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]2, 3[$

b) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C_f) de f

3-a) Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \quad \forall x \in J$

c) Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} dans le même repère que (C_f)

4- Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) En déduire que (u_n) est convergent et calculer sa limite.

Exercice n°5 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1- a) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$

2- a) f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1. Justifier

b) Déterminer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et déterminer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

3- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$

Bon Travail