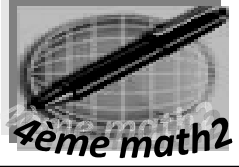




DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1
PROF – BELLILI MONGI
DATE : 04 / 12 / 2012 , Durée : 3h



EXERCICE N°1 (02 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

1°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α . Alors un argument de $\frac{\sqrt{3}-i}{(\bar{z})^2}$ est :

a/ $-\frac{\pi}{6} + 2\alpha$

b/ $-\frac{\pi}{6} - 2\alpha$

c/ $-\frac{\pi}{6} + \alpha^2$

2°) Soient A et B deux points d'affixes respectives 2 et $2i$.

Alors l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $\frac{z-2i}{z-2}$ soit imaginaire pur est :

a/ la droite (AB) privée des points A et B

b/ Le segment $[AB]$ privé des points A et B

c/ Le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

3°) Soit M et M' deux points distincts du plan complexe d'affixes non nulles respectives z et z' ; symétriques par rapport à l'axe des réels alors :

a/ $z' = -z$

b/ $z' = \bar{z}$

c/ $z' = \frac{1}{z}$

EXERCICE N°2 (05,5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4]$ par $f(x) = \frac{3}{1 + \sqrt{4-x}}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1/ a- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 4 puis interpréter graphiquement le résultat

b- Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 4[$ et que pour tout :

$x \in]-\infty, 4[$ on a : $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4-x}(1 + \sqrt{4-x})^2}$ et dresser le tableau de variation de f

c- Vérifier que $x \in]-\infty, 3]$ on a : $f'(x) \leq \frac{3}{8}$

d- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-\infty, 3]$ une unique solution α puis vérifier que $\alpha \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$

e- Tracer la courbe représentative ζ_f de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

2°) a- Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 4]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f et $\zeta_{f^{-1}}$ sa courbe représentative

b- Tracer la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ et calculer $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de J

3°) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a- Montrer que pour tout entier n , on a : $1 \leq U_n \leq 3$

b- Montrer que pour tout entier n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{8}|U_n - \alpha|$

c- En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite

➡ suite au verso

EXERCICE N°3 (04,5 pts)

1°) Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos(\pi x)}$

a- Etudier les variations de f et déduire quelle réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b- Calculer $f^{-1}(2)$

c- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout x appartenant à $]1, +\infty[$

2°) Soit n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par : $f_n(x) = f(x) + x^n - 2$

a- Etudier les variations de la fonction f_n et déduire que l'équation : $f_n(x) = 0$ admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une unique solution qu'on la note α_n

b- Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

c- Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

d- Montrer alors que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite

EXERCICE N°4 (03 pts)

1°) Soit $\theta \in]0, \pi[$, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 1 = 0$; résoudre (E)

2°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 2e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$

a- Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle

b- Montrer que le quadrilatère $OBAC$ est un rectangle

c- Déterminer le réel $\theta \in]0, \pi[$ tel que $OBAC$ soit un carré

EXERCICE N°5 (05 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O tel que

$(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit M un point de la droite (BC) distinct de B et de C . La perpendiculaire à (AM) en A coupe (DC) en N .

On désigne par : R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par T la translation de vecteur \vec{AC}

1°) a- Déterminer l'image de la droite (BC) par R

b- Montrer que le triangle AMN est isocèle et rectangle en A

2°) Montrer que l'application $f = T \circ R$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre

3°) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que : $\varphi(B) = A$ et $\varphi(C) = B$ que l'on caractérisera

b- Montrer que $\varphi \circ R$ est une translation dont on déterminera le vecteur

4°) Soit ψ l'antidépacement tel que : $\psi(B) = A$ et $\psi(C) = B$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$

a- Montrer que ψ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques

b- Montrer que l'application $\varphi^{-1} \circ \psi$ est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe

BON TAVAR