Lycée secondaire Zannouch

Date: 6 décembre 2011

Prof: Mr.Smairy.J

Devoir de synthèse de mathématiques n°1

Niveau: 4ème année maths

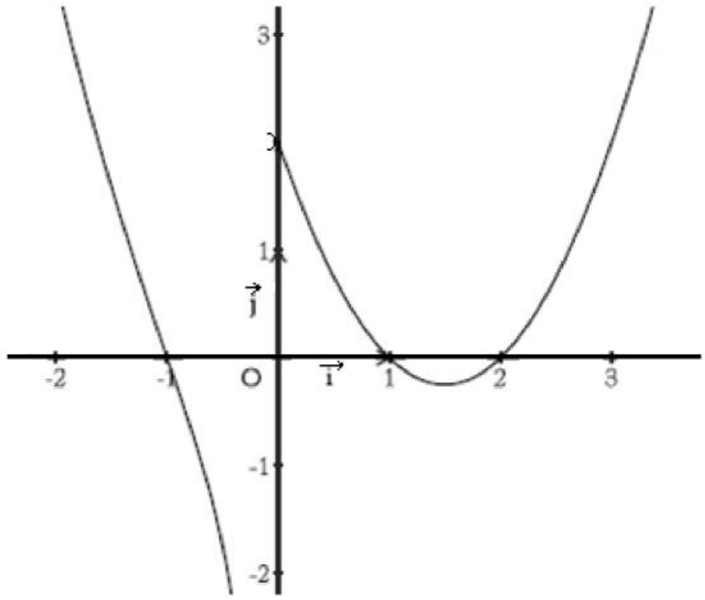
✲ ✲ ✲

Durée: 3 heures

Exercice 1: (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point

La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.



La courbe de f admet exactement:

- ✓ Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- ✓ Deux branches infinies de direction celle de l'axe des ordonnées respectivement au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

1) La limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est égale à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

2) La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(2 - x\sin(\frac{1}{x}))$ est égale à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

3) La limite en 0 de la fonction $x \mapsto f(\frac{x^2}{-1+\sqrt{1+x^2}})$ est égale à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

4) Le domaine de définition de $(f \circ f)$ est :

a) $\mathbb{R}^*$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1 ; 2\}$ c) $\mathbb{R}^* \setminus \{-1 ; 1 ; 2\}$

5) Le nombre de solution, dans $]0 , 1[$, de l'équation $f \circ f(x) = -1$ est :

a) 0 b) 1 c) 3

6) La limite à gauche en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{f \circ f(x)}{x}$ est égale à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice 2: (4 points)

On considère les suites réelles (S_n), (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$, par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{K-1}}{k}$, $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq V_n$

2) a- Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

   b- Montrer que (V_n) converge vers un réel $\alpha \leq \frac{5}{6}$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

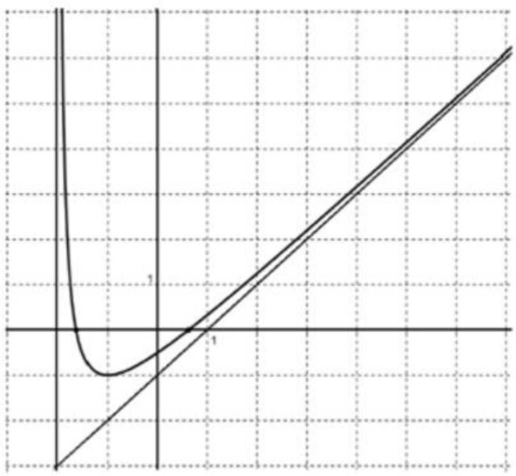
5) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq \alpha \leq V_n$

   b- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{2n+1} \leq 0{,}02$.

   c- En déduire un encadrement de α à 0,02 près. (**indication :** $S_{51} \approx 0{,}702$).

Exercice 3: (4 points)



La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g définie et dérivable sur]-2 , +∞ [.

La courbe C_g admet exactement:

- ✓ Une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
- ✓ Une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.
- ✓ Une tangente horizontale au point d'abscisse -1.

A- Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes:

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)-x}{x+1}$

2) Dresser le tableau de variation de g sur]-2 , +∞ [.

B- Soit f la fonction définie sur]-2 , +∞ [par $f(x) = g(x) - x + 2$.

1) Etudier la position de C_f par rapport à C_g. (C_f étant la courbe représentative de f).

2) a- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

   b- Etudier la position de C_f par rapport à T.

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans]-2 , +∞ [.

Exercice 4: (4 points)

A- On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

2) **a-** Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = (z-1)(z^2 + az + b).$$

b- Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1) Soit $M(z_1)$ et $N(z_2)$ deux po[illegible]nages respectives M'et N' par f.

a- Montrer que $z'_2 - z'_1 = i$[illegible]).

b- En déduire que f est une isométrie du plan.

2) Montrer que f n'admet aucun point invariant.

3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, -1, $1+2i$ et $1+i$.

a- Déterminer f(A) et f(B).

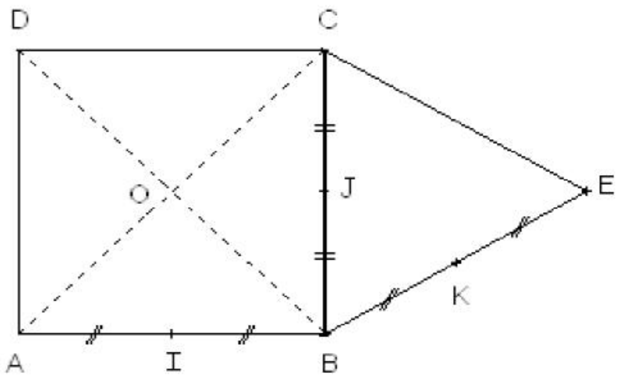
b- Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 5: (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré direct de centre O et BEC est un triangle équilatéral direct.

Les points I, J et k sont les milieux respectifs des segments [AB], [CB] et [EB].



1) **a-** Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

b- Caractériser f.

c- Déterminer la droite Δ telle que $f = S_\Delta \circ S_{(OI)}$.

2) Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante g qui envoie A sur C et B sur D.

3) **a-** Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$.

b- Caractériser $g \circ f$.

c- En déduire la forme réduite de g.

4) Soit h l'antidéplacement qui envoie B sur E et C sur B.

a- Déterminer $h(J)$ et $(h \circ h)(C)$.

b- Montrer que h est une symétrie glissante et en déterminer la forme réduite.

Projet de correction du devoir de synthèse de mathématiques n°1

Niveau: 4ème année maths **Réalisée par : Mr.Smairy.J**

Exercice 1: (3 points)

1) La fonction f admet une branche infinie de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ donc la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est infinie. Par ailleurs, lorsque x est au voisinage de $-\infty$, $f(x) > 0$ et ainsi $\frac{f(x)}{x} < 0$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2 - x\sin(\frac{1}{x})) = 1$; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(2 - x\sin(\frac{1}{x})) = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{-1+\sqrt{1+x^2}} = 2$; $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(\frac{x^2}{-1+\sqrt{1+x^2}}) = 0$.

4) $f \circ f(x)$ existe si et seulement si, $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0 \Longrightarrow$ $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1 ; 1 ; 2\}$.

5) $0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < f(x) < 2$; $-1 \notin f(\,]0\,,2[\,) \Longrightarrow -1$ n'admet pas un antécédent par $f \circ f$ dans $]0\,,1[$, ainsi l'équation $f \circ f(x)=-1$ n'admet pas de solution dans $]0\,,1[$.

6) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f \circ f(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ et ainsi $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f\circ f(x)}{x} = -\infty$.

<u>**Bilan:**</u>

questions	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
réponses	b	a	a	c	a	b

Exercice 2: (4 points)

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{K-1}}{k}$, $U_n = S_{2n}$, $V_n = S_{2n+1}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n - V_n = S_{2n} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{K-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{K-1}}{k}$$

$$= -\frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1}$$

$= -\frac{1}{2n+1}$; d'où $U_n - V_n \leq 0$ et ainsi : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, on a: } U_n \leq V_n}$

2) **a-** $V_{n+1} - V_n = S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$

$$= S_{2n+3} - S_{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^{K-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{K-1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+2}$$

$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)}$; d'où $V_{n+1} - V_n \leq 0$ et ainsi : $\boxed{\text{la suite } (V_n) \text{ est décroissante.}}$

b- On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq V_n$ donc $V_n \geq U_1$ avec $U_1 = \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (V_n) est minorée et comme elle est décroissante alors, elle converge vers un réel α. Par ailleurs, puisque (V_n) est décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq V_1$ avec $V_1 = \frac{5}{6}$ et par passage à la limite on aura $\alpha \leq \frac{5}{6}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \alpha\ ;\ \alpha \leq \frac{5}{6}}$

3) $U_{n+1} - U_n = S_{2(n+1)} - S_{2n}$

$$= S_{2n+2} - S_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{K-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{K-1}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$$

$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$; d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et ainsi : $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est croissante.}}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n - V_n = -\frac{1}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Les suites (U_n) et (V_n) vérifient les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq V_n$
- La suite (U_n) est croissante et la suite (V_n) est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Il s'en suit que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et ainsi elles convergent vers la même limite ce qui donne : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha.}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \alpha$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \alpha \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \alpha$

Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers le même réel α alors (S_n) est convergente et on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \alpha.}$

6) **a-** $\begin{cases} (U_n) \text{ est croissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha \end{cases} \Longrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \alpha$

$\begin{cases} (V_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \alpha \end{cases} \Longrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \leq V_n$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a: } U_n \leq \alpha \leq V_n}$

b- $\frac{1}{2n+1} \leq 0{,}02 \Longrightarrow 2n + 1 \geq 50 \Longrightarrow n \geq 24{,}5$ ainsi **<u>25</u>** est le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{2n+1} \leq 0{,}02$.

c- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq \alpha \leq V_n$ donc $0 \leq \alpha - U_n \leq V_n - U_n$ et ainsi $0 \leq \alpha - U_n \leq \frac{1}{2n+1}$

Un encadrement de α à 0,02 près est alors établi dès que n = 25. Dans ce cas $U_{25} \leq \alpha \leq V_{25}$ ce qui est équivaut à

$S_{50} \leq \alpha \leq S_{51}$. Par ailleurs, $S_{51} \approx 0{,}702$ donc $S_{50} \approx 0{,}682$. (en effet $S_{51} = S_{50} + \frac{1}{51} \approx S_{50} + 0{,}02$).

Il en résulte que $\boxed{0{,}682 \leq \alpha \leq 0{,}702}$

<u>Remarque :</u> la valeur exacte de α est $\ln 2$ où $\ln$ est la fonction logarithme népérien.($\ln 2 \approx 0{,}69$ à 0,01 près).

Exercice 3: (4 points)

A- Exploitation du graphique :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$. ($C_g$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique de coefficient directeur **1** dans le sens des $g(x)$ positifs).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} = 1 \times 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x) - x}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} - 1 = g'(-1) - 1 = -1$.

2) Tableau de variation de g sur]-2 , +∞ [:

x	-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

B- Etude d'une fonction auxiliaire : f(x)= g(x) − x + 2 ; x ∈]-2 , +∞ [.

1) f(x) − g(x) = $-x+2$

- Si $-2 < x < 2$ alors f(x) − g(x) > 0 ce qui prouve que C_f est au dessus de C_g.
- C_f et C_g se coupent au point d'abscisse 2.
- Si $x > 2$ alors f(x) − g(x) < 0 ce qui prouve que C_f est au dessous de C_g.

2) **a-** Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -1 s'écrit : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$.

or $f'(-1) = g'(-1) - 1 = -1$ et $f(-1) = 2$ d'où : $\boxed{T : y = -x + 1.}$

b- On a $f(x) - x - 1 = g(x) + 1$ et puisque $g(x) \geq -1$ pour tout réel x de]-2 , +∞ [alors $f(x) - x - 1 \geq 0$ ce qui prouve que C_f est au dessus de T.

3) Comme C_g admet, au voisinage de +∞, une asymptote d'équation $y = x - 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x + 1 = 0$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x + 2 = 1$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et ainsi la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de +∞.

4) Pour tout réel x de]-2 , +∞ [, $g(x) \geq x - 1$.(C_g est au dessus de la droite d'équation $y = x - 1$). Il en résulte que, pour tout réel x de]-2 , +∞ [, $g(x) - x + 1 \geq 0$ d'où $f(x) \geq 1$ ce qui affirme que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans]-2 , +∞ [.

Exercice 4: (4 points)

A- (E) : $z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = 0$; $z \in \mathbb{C}$.

1) On pose $z_0 = x$; $x \in \mathbb{R}$. z_0 est une solution de (E) ⇔ $x^3 - (3+3i)x^2 + (1+6i)x + 1 - 3i = 0$.

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 - 3i(x^2 - 2x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) admet une racine double qui est **1**. Cette racine vérifie l'équation (2). Il en résulte que le réel **1** est l'unique solution du système précédent et ainsi $z_0 = 1$ est l'unique solution réelle de l'équation (E).

2) **a-** $(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$.

Par identification membre à membre, on obtient le système suivant : $\begin{cases} a - 1 = -3 - 3i \\ b - a = 1 + 6i \\ -b = 1 - 3i \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = -2 - 3i \\ b = -1 + 3i \end{cases}$

b- (E) ⇔ $(z-1)(z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i) = 0$ ⇔ $z = 1$ ou $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$.

- Résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E') $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$.

$\Delta = (2+3i)^2 - 4(-1+3i) = 4 + 12i - 9 + 4 - 12i = -1 = i^2$

Les solutions , dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E') sont ainsi : $z_1 = \frac{2+3i-i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{2+3i+i}{2} = 1 + 2i$.

➢ (E) ⇔ $z = 1$ ou $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$ ⇔ $z = 1$ ou $z = 1 + i$ ou $z = 1 + 2i$.

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{1 \,;\, 1+i \,;\, 1+2i\}}$$

B- f : P ⟶ P

$M(z) \longmapsto M'(z')$; $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1) a- Soit $M(z_1)$ et $N(z_2)$ deux points d'images respectives M' et N' par f.

$$z_2' - z_1' = i\overline{z_2} + 1 + i - i\overline{z_1} - 1 - i = i\overline{z_2} - i\overline{z_1} = i\overline{(z_2 - z_1)}.$$

b- M'N'= $|z_2' - z_1'| = |i\overline{(z_2 - z_1)}| = |i| \times |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| =$ MN

Comme f conserve les distances ,elle est bien une isométrie du plan.

2) Soit M(z) un point du plan.

On pose $z = x + iy$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

M est invariant par f $\Leftrightarrow z = i\bar{z} + 1 + i$

$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 1 + i$

$\Leftrightarrow x + iy = ix + y + 1 + i$

$\Leftrightarrow x - y - 1 - i(x - y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Le système précédent n'admet pas de solution et ainsi f n'admet pas de points invariants.

3) Soit les points A, B, C et D d'affixes respectives 1 , − 1 , 1 + 2i et 1 + i.

a- Si $z = 1$ alors $z' = i + 1 + i = 1 + 2i$ d'où f(A) = C.

Si $z = -1$ alors $z' = -i + 1 + i = 1$ d'où f(B) = A.

b- f est une isométrie sans points fixes donc elle est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissante.

On a $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BA}$ car $Z_{\overrightarrow{AC}} = 2i$ et $Z_{\overrightarrow{BA}} = 2$ donc f n'est pas une translation et ainsi elle est une symétrie glissante d'où

f= $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

$\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = A \end{cases} \Longrightarrow f \circ f(B) = C$ or $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ d'où $2\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ et ainsi $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD}$

D'autre part O et D sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] ce qui prouve que Δ = (OD).

<u>Conclusion</u> : $\boxed{f = t_{\overrightarrow{OD}} \circ S_{(OD)}}$

Exercice 5: (5 points)

1) a- Comme ABCD est un carré alors AB = CD et AB ≠ 0 et par conséquent il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(B) = D.

b- f est un déplacement donc il est soit l'identité, soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul

➢ $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ donc f n'est pas une translation.

➢ f(A) = C et A ≠ C donc f est différent de l'identité.

⟹ f est une rotation d'angle α non nul. ($\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ [2π] ⟹ α ≡ π [2π])

⟹ f est une symétrie centrale et comme f(A) = C et O est le milieu de [AC] alors $\boxed{f = S_O}$

<u>Autre méthode</u> : $\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases}$ ⟹ f est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ et comme $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \pi$ [2π] alors f est une rotation d'angle π. Par ailleurs, med[AC]∩med[BD] = {O} d'où : $\boxed{f = r_{(O,\pi)} = S_O}$