DEVOIR DE SYNTHESE N°1 :
BAC MATH: LYCEE FERIANA: DUREE: 3H: PROF: MHAMDI

EXERCICE N°1 : (5pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ de centre I tel que : $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ soit J le milieu de $[BA]$ *et* K le milieu de $[AD]$ **(ANNEXE2)**

1°) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(B) = D$ et $f(I) = A$

2°) Montrer que f est une symétrie glissante d'axe (AC) et de vecteur $\overrightarrow{IA}$

3°) Soit O le milieu de $[IB]$ .Montrer que $f(O) = K$

4°) Soit $P = S_{(AC)}(O)$

a) Montrer que $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{IA}$

b) En déduire que P est le milieu de $[CD]$

5°) Soit $g = S_I \circ S_{(AD)}$

a) Déterminer : $g(A)$ *et* $g(D)$ .Montrer que g est une symétrie glissante

b) Montrer que $S_I = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)}$ .Caractériser g

6°) Soit $h = g \circ f$

a) Déterminer $h(B)$ *et* $h(I)$

b) Montrer que h est une rotation dont déterminera l'angle et le centre

EXERCICE N°2 : (4,5pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ *par :* $f(x) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ .On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

1°)a) Etudier la dérivabilité de f à droite en **0.**

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en **1.**

2°)a) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$$

b) Etudier les variations de f

3°) a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a :

$$f(x) = x \iff \sqrt{x} = 1 - x$$

b) Dans **L'ANNEXE N°1** on a tracé la courbe C_3 en pointillé représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ .Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α et construire le point A de Γ d'abscisse α

4°)a) Montrer en appliquant le théorème des accroissements finies Que l'équation : $f'(x) = 1$ admet dans $[0,\alpha]$ au moins une solution β_1 et dans $[\alpha,1]$ au moins une solution β_2

b) Soit $k \in \{1,2\}$ montrer que $f(\beta_k) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{\beta_k}}$

c) Dans **L'ANNEXE N°1** on a tracé les courbes C_1 de la fonction f' la dérivée de la fonction f et C_2 en gras de la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

Utiliser C_1 *et* C_2 pour construire les points $B_1\ (\beta_1, f(\beta_1))$ *et* $B_2\ (\beta_2, f(\beta_2))$

5°) Tracer Γ ainsi que les tangentes aux points B_1 *et* B_2

EXERCICE N°3 : (3,5pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_m: z^3 + mz^2 - mz - 1 = 0$

où m est un paramètre complexe

1°) Résoudre l'équation E_0 (pour $m = 0$)

2°) Dans cette question $m \neq 0$

a) Montrer que si z_0, z_1 *et* z_2 sont les solutions de E_m alors $z_0 . z_1 . z_2 = 1$

b) Montrer que si z est solution de E_m alors $\frac{1}{z}$ est aussi solution de E_m

c) Montrer que E_m admet au moins une solution de module **1**

3°) Dans cette question on suppose que $|\boldsymbol{m}| = \mathbf{1}$ *et* $\boldsymbol{arg(m) \equiv \alpha[2\pi]}$

a) Vérifier que $(-\boldsymbol{m})$ est solution de $\boldsymbol{E_m}$

b) Déterminer les solutions de $\boldsymbol{E_m}$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{2z^3 + (1 + i\sqrt{3})z^2 - (1 - i\sqrt{3})z - 2 = 0}$

EXERCICE N°4 : (3pts)

1°) Pour tout $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{a}$ de $\left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\boldsymbol{a} > 0$ on pose :

$$\boldsymbol{g(x) = \sin x - x - x^3\left(\frac{\sin a - a}{a^3}\right)}$$

a) Montrer qu'il existe $\boldsymbol{c} \in \left]\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\right[$ tel que : $\boldsymbol{g'(c) = 0}$

b) On pose $\boldsymbol{\theta = \frac{c}{a}}$ Montrer que $\boldsymbol{a - \sin a = \frac{a^3}{3} \times \frac{1-\cos a\theta}{(a\theta)^2}}$

c) Déduire les résultats suivants :

(1) Pour tout $\boldsymbol{a} \in \left]\mathbf{0}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\boldsymbol{\sin a < a}$

(2) $\boldsymbol{\lim_{a\to 0^+} \frac{a-\sin a}{a^3} = \frac{1}{6}}$

2°) On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}} \quad si \ \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}; \frac{\pi}{2}\right] \quad et \quad \boldsymbol{f(0) = 0}$$

a) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\boldsymbol{\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right)}$$

b) Montrer que f est dérivable à droite en **0**

c) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}}$

d) Etudier les variations de $\boldsymbol{f}$

<u>EXERCICE N°5 :</u> (4pts)

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, $n \in IN$

1°) Montrer que

a) Pour tout $n \in IN$ on a : $U_n \geq 0$

b) Pour tout entier naturel $n \geq 5$ on a : $U_n \geq n$

c) (U_n) est une suite divergente

2°) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+2}.U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

3°) Soit pour tout entier naturel n non nul les deux suites

(V_n) *et* (W_n) définies par : $V_n = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}$ et $W_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{U_{2n+2}.U_{2n}}$

Et déduire la monotonie de (V_n)

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{U_{2n+3}.U_{2n+1}}$

Et déduire la monotonie de (W_n)

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $V_n - W_n = \frac{1}{U_{2n+1}.U_{2n}}$

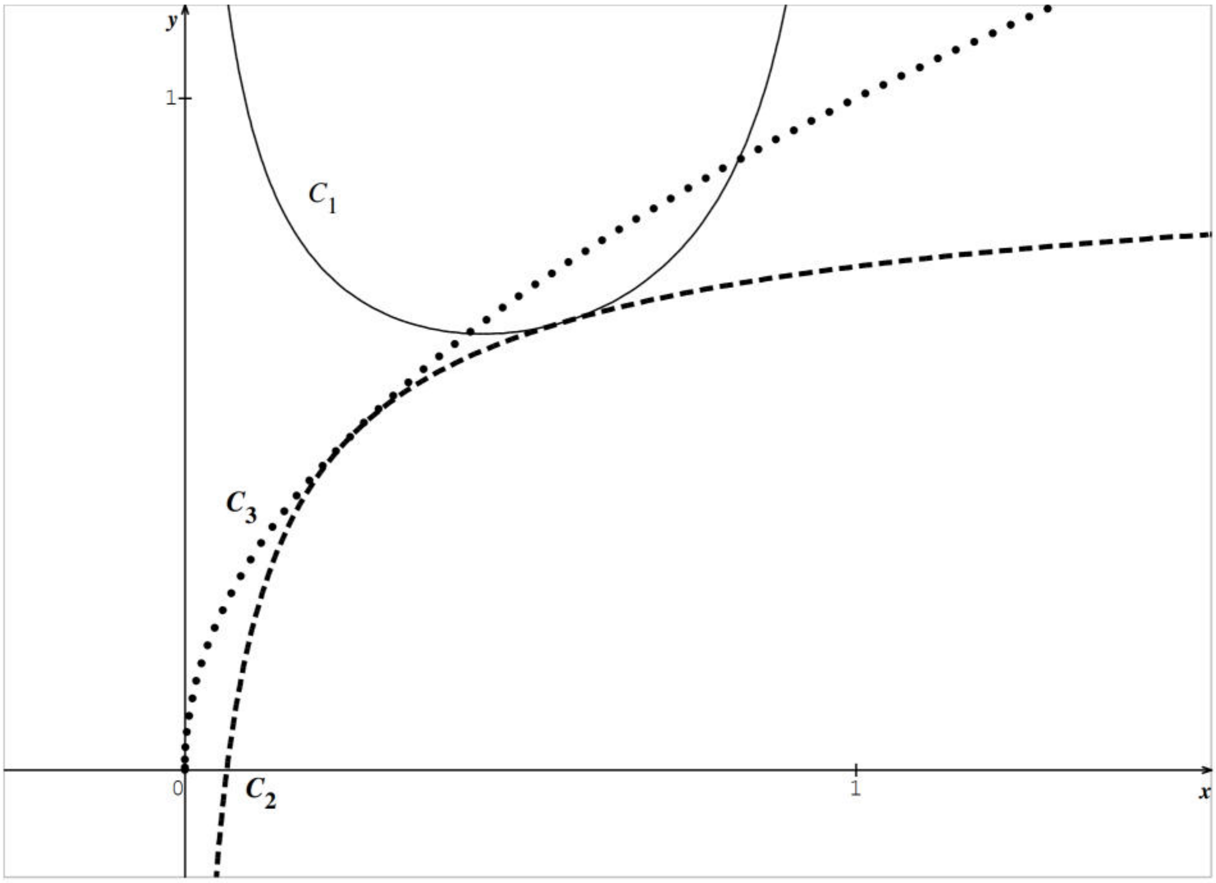
d) Déduire que les suites (V_n) ***et*** (W_n) converge vers une limite commune α

e) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $W_n = 1 + \frac{1}{V_n}$

Déduire la valeur exacte de α

<u>FEUILLE A RENDRE :</u> NOM…………………… PRENOM……………………

ANNEXE1 :



ANNEXE2 :