Lycée Secondaire H. Ghezez	**Devoir de Synthèse N° 1**	Pr : Mr Y.Boulila
Durée : 3 heures		Classe : 4emeMATHS Dec 2010

EXERCICE N° I :(6 points)

Pour chacune des questions suivantes sont proposées 4 assertions chacune pouvant être vraie ou fausse. Associer à chacune la bonne réponse sans donner de justification.

<u>Question 1 :</u>

On considère dans□ , l'équation $(E)\quad \overline{Z}=j\times Z^2$

Où $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{i2\pi}{3}}$ Z_0 est une solution de E, non nulle

a) $\overline{Z}_0$ est une solution de (E)

b) $|Z_0|=1$

c) $e^{-i\frac{2\pi}{9}}$ est une solution de (E)

d) $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)-i\ \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ est une racine cubique de $\overline{j}$

<u>Question 2 :</u>

On considère la fonction $f: x\rightarrow x+\cos x$

a) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et f strictement croissante sur □ .

b) f est une bijection de □ sur□ .

c) f^{-1} est dérivable sur□ .

d) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$

<u>Question 3 :</u>

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle (C). Le point D est diamétralement opposé à A. Alors si

$f=s_{(BD)}\ o\ s_{(DC)}$ et $g=s_{(CA)}\ o\ s_{(AB)}$

a) f est la rotation $R\left(\mathrm{D}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

b) g est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$

c) $f o g$ est une translation.

d) Si $A' = f(A)$ alors C est le milieu de $[AA']$

EXERCICE N°II :(4 points)

Etant donné, dans le plan orienté, deux points O_1 et O_2, on désigne par M_1 le transformé d'un point quelconque M de ce plan par la rotation de centre de centre O_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et par M_2 le transformé de M_1 par la rotation de centre O_2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1/ Montrer que le milieu J du segment $[MM_2]$ est un point fixe.

2/ Déterminer l'ensemble des points M pour les quels M, M_1, et M_2 sont alignés.

3/ Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels : $\dfrac{MM_1}{M_1M_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4/ On pose $f = R_2 \; o \; R_1$ et $g = f \; o \; s_{(O_1O_2)}$

Caractériser l'application g.

EXERCICE N°III:(7 points)

Soit f définit par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$; I son ensemble de définition, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1/ a) Déterminer I.

b) Etudier la continuité de f sur I, puis la dérivabilité de f sur I.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Démontrer : $\forall\, x \in I \,;\, f(x) \geq x$

e) Tracer (C) ainsi que $\Delta :\ y=x$

2/ a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0,2[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur J.

3/ a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$; l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[0,2[$ notée : x_n

b) Déterminer x_0 et x_1

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$

d) En déduire que $\left(x_{n_{-1}}\right)$ converge et calculer sa limite.

4/ a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

b) Déterminer f^{-1} et retrouver le résultat précédent.

c) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère que f.

EXERCICE N°IV:(4 points)

On considère les nombres complexes Z_n ; $(x \in \mathbb{N})$; définis par :

$$\begin{cases} Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n \;;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par M_n l'image de Z_n dans le plan Complèxe muni d'un R.O.N. direct$\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$. (Unité 4 cm)

1/ Placer les points M_0, M_1,…………………..M_{11}

2/ a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a $Z_n = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}\right)}$

b) En déduire les points Mn confondus

3) Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Z_{n+6} + Z_n = 0$ et interpréter le résultat

4/a) Calculer sous forme exponentielle : $\dfrac{Z_{n+8} - Z_n}{Z_{n+4} - Z_n}$

b) En déduire la nature du triangle $M_n\,M_{n+4}\,M_{n+8}$