Exercice 1 : *(3 points)*

Répondre par " vrai " ou " faux " (aucune justification n'est demandée).

1.La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ *est dérivable sur* $[0,1[$.

2.La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\cos x)$ *est la fonction* $x \mapsto \cos(\cos x)$.

3.La fonction $x \mapsto x\,\mathrm{cotan}(x)$ *est prolongeable par continuité en 0.*

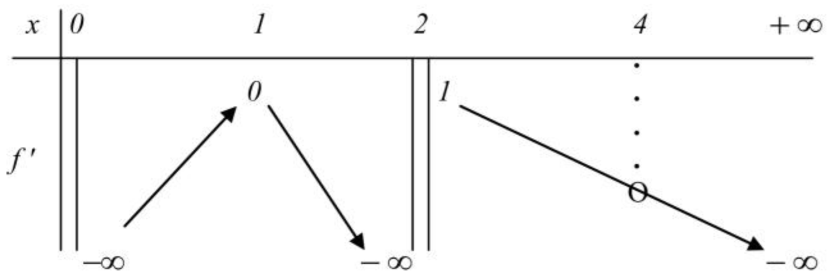
4.L'équation $\sqrt{1-x^3} = x$ *admet dans* $[0,1]$ *une solution unique.*

Exercice 2 : *(4 points)*

Soit f est une fonction définie,continue sur $]0,+\infty[$ *et dérivable sur les intervalles* $]0,2[$ *et* $[2,+\infty[$.

(C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction dérivée f ' de f .



1.Déterminer l'extremum de f et l'abscisse du point d'inflexion de (C).

2.Comparer f (2) et f (4) en justifiant.

3.Montrer que $f(4) \leq 2 + f(2)$ *(on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).*

4.Donner le signe de f ' (x) puis dresser le tableau de variation de f sachant que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$.

5.On donne $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$*.Donner l'allure de (C) en précisant le points remarquables et les demi-tangentes.*

Exercice 3 : *(5 points)*

Soit a un nombre complexe .On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation:*

$(E) : z^2 + (a - 2 - ia)z + ia(2 - a) = 0$.

1.Vérifier que ia *est solution de (E) puis résoudre (E).*

2.Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$*,on considère les points A,B et C d'affixes respectives* ia , $2 - a$ *et* $-a$.

a.Montrer que A,B et C sont distincts deux à deux si et seulement si $a \notin \{0, 1-i\}$.

b.Montrer que OABC est un losange si et seulement si $a = -2i$.

3.On considère l'application $f : P \to P$ $M(z) \mapsto M'(z')$; $z' = iz + 2$.

a.Déterminer la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image de A par f.

c.Soit Ω *le point tel que* ΩAB *est un triangle rectangle et isocèle en* Ω *de sens direct .*
Montrer que lorsque a varie le point Ω *reste fixe.*

voir verso ⇒

Exercice 4: *(4 points)*

Dans le plan orienté,on considère un carré direct ABCD de centre O.On note par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1.Soit f l'isométrie telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = D$.

a.Déterminer l'image de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ par f.En déduire que f est un déplacement.

b.Vérifier que f est une rotation que l'on caractérisera.

2.Soit l'application $g = f \circ S_{(AB)}$.

a.Déterminer g (A) et g (B). En déduire que g est une symétrie glissante.

b.Déterminer l'axe et le vecteur de g.

3.a.Montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(BC)}$.

b.En déduire que les images d'un point M par f et g respectivement sont symétriques par rapport à la droite (BC).

4.Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.Caractériser l'application $h = f \circ R$.

Exercice 5: *(4 points)*

On considère les suites u et v définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = v_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1.Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$.

2.On définit les suites (a_n) et (b_n) sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 2$.

a.Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a: $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|a_n|$.

En déduire que $|a_{n+2}| \leq \dfrac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \dfrac{1}{2}|b_n|$.

b.Montrer alors , par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $|a_{2n}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $|b_{2n}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c.Déterminer les limites respectives des suites (u_{2n}) et (v_{2n}) .

* * * * * * * * * *

Bon travail