Lycée secondaire Bembla	DEVOIR DE SYNTHESE N°1 08/12/2009	Lycée secondaire Bennane-Bodheur
Mr : Yacoubi Hamda	Durée : 3h ***********4ème Math	Mr : Bouhouch Ameur

Exercice n°1: (3pts)

Pour chacune des trois premières questions, choisir la seule réponse correcte (aucune justification n'est demandée).

1) Soit le nombre complexe $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, alors on a:

a) $z^3=1$ b) $z^3=-1$ c) $z^6=-1$

2) Soient I et J deux points distincts. Alors l'application définie par $S_I \circ S_J$ est :

a) une rotation b) une symétrie orthogonale c) translation

3) Soit ABCD un rectangle et soient E=A*B et F=D*C. alors si $f=t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ on a:

a) f est une symétrie glissante b) $f=S_{(EF)}$ c) $f=S_{(BC)}$.

4) Soit f une fonction définie sur IR et deux fois dérivables et (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé et dont le tableau de variation de sa fonction dérivé f ' est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Répondre par "Vrai" ou "Faux" à chaque question:

a) La courbe représentative (ζ) de f admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

b) La courbe représentative (ζ) de f admet exactement deux tangentes horizontales.

c) f est strictement décroissante sur$]-\infty,2]$.

Exercice n°2: (3pts)

Soit, dans C, l'équation (E): $z^2-(3+i\sqrt{3})z+2(1+i\sqrt{3})=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z' qu'on déterminera.

2) Déduire l'autre solution z'' de l'équation (E).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives 2i et $1+i\sqrt{3}$.

a) Placer les points A et B sur une figure.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

Exercice n°3: (7pts)

Le plan est orienté dans le sens direct; soit ABCD un carré de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.
   a) Montrer que f([BD])=[BD].
   b) Prouver, alors, que f(O)=O et que f(A)=A.
   c) En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABD.
2) Soit g une isométrie qui transforme le triangle ABD en le triangle BCD.
   a) Montrer que l'application S_O og est une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.
   b) En déduire toutes les isométries qui transforment le triangle ABD en le triangle BCD.
3) On suppose que AB=1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a) Déterminer les affixes de chacun des points A, B, C et D.
   b) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = -\bar{z}+1+i$ .Montrer que f est une isométrie sans point invariant.
   c) Déterminer f(A) et f(B) et déduire la nature de f.

Exercice n°4: (7pts)

Soit la fonction f définie sur]1,2] par $f(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2.Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Justifier que f est dérivable sur]1,2[et que $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$.
2) a) Dresser le tableau de variation de f .
   b) Tracer la courbe (ζ) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3) a) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans] 1,2] une solution unique α .
   b) Montrer que $\alpha = 1+\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.
4) On pose $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   a) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   b) Soit la suite réelle définie sur IN par $U_0=1$ et $U_{n+1}=g(U_n)$.
   Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a: $U_n \in [1,2]$.
5) <u>On admet</u> que pour tout $x\in[1,2]$, $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$.
   b) Prouver que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$ et en déduire la limite de la suite (U_n).