Exercice 1 : (3 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données . Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction continue sur [0, 1], strictement croissante sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[. Si l'on sait de plus que f(0) = -1 et f(1) = 1, alors :

   a) L'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans]0, 1[.

   b) L'équation $f'(x) = -2$ admet au moins une solution dans]0, 1[.

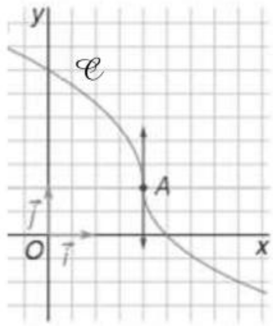
2. Soit f , g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout x réel , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

   Si l'on sait de plus que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors :

   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

3. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f passant par A(2,1)

   a) f est dérivable en 2 ; **b)** A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



Exercice 2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur [0, 2].

2. a) Montrer que f^{-1}, la fonction réciproque de f , est dérivable sur]0, 2[.

   b) Déterminer pour tout x de]0, 2[, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$.

3. On pose pour tout x de [0, 2], $g(x) = f^{-1}(2 - x) + f^{-1}(x)$.

   a) Montrer que g est dérivable sur]0, 2[puis calculer, pour tout x de]0, 2[, g'(x).

   b) En déduire que pour tout x de [0 , 2] , $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$.

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)$.

   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n} f^{-1}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n} f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)$.

Exercice 3: (5 points)

α est un réel de $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, on considère l'équation (E) : $z^2-\left(e^{i\alpha}-ie^{-i\alpha}+2\right)z-i+2 \quad {}^{i\alpha} = \ . \ e$

1. a) vérifier que $z_1 = e^{i\alpha}$ est solution de (E).

   b) Déterminer z_2 l'autre solution de (E) puis vérifier que $z_2 = -i\overline{z_1} + 2$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i , z_1 et z_2.

   a) Montrer que l'application φ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\overline{z}+2$ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

   b) Montrer que, lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, M_1 décrit l'arc $\overset{\frown}{BA}$ du cercle trigonométrique de centre O.

   c) En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Exercice 4: (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. On note I le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A par rapport à O .

1. Montrer que AO = DB et que I est milieu du segment [OD].
2. Soit f une isométrie du plan qui envoie A sur D et O sur B. On pose g = $t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [BO].

   a) Déterminer g(O) et g(A). En déduire que $g = S_{(BO)}$ ou $g = r_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}$.

   b) Montrer que l'on a : $f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$ ou $f = r_{\left(K, -\frac{2\pi}{3}\right)}$.

3. On désigne par $f_1 = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$ et $f_2 = r_{\left(K, -\frac{2\pi}{3}\right)}$.

   a) Déterminer $f_2^{-1} \circ f_1(O)$ et $f_2^{-1} \circ f_1(A)$.

   b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$.