Exercice n°1 (4 pts)

Soit ABC un triangle quelconque, de sens direct, du plan complexe P. A l'extérieur du triangle ABC , on construit les triangles équilatéraux directs AC'B , BA'C , CB'A .
On note a , b , c , a' , b' , c' les affixes respectives des points A ,B , C , A' , B' , C'.

1) Montrer que $\frac{a'-c}{b-c}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$. En déduire la formule $a' = b\, e^{i\frac{\pi}{3}} + c\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2) Déterminer de même les affixes b' et c' des points B' et C'
3) Calculer a'+ b' + c' en fonction de a , b , c et montrer que les triangles A'B'C' et ABC ont le même centre de gravité G .
4) a) Montrer que : $a' - a = e^{2i\frac{\pi}{3}}(c' - c)$ et en déduire l'égalité AA' = CC'
   b) Montrer l'égalité : AA' = BB' = CC'

Exercice n°2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f sur $[0,1[$
2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur IR_+.On note f^{-1} la réciproque de f.
   b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en zéro
3) a) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$, préciser les coordonnées des points d'intersection de C_f et Δ
   b) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère ON.
4) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0 ; \frac{1}{2}[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de IN .
   a) Montrer que ; pour tout n de IN on a : $u_n \in]0 ; \frac{1}{2}[$
   b) Montrer que (u_n) est monotone, en déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice n°3 (11 pts)

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$

I) 1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f
   b) Etudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ sur IR_+, en déduire que l'équation : f(x) = x admet dans IR_+ une solution unique α tel que $\alpha \in]\frac{4}{5} ;1[$
   c) Construire la courbe C_f et la droite $\Delta : y = x$ dans un même repère ON $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]\frac{4}{5} ;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de IN .
   a) Montrer que ; pour tout n de IN on a : $u_n \in]\frac{4}{5} ;1[$
   b) Vérifier que : $\forall x \in IR_+$ on a : $|f'(x)| - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^2-3}{x^2+2x+2}\right]^2$
   en déduire que $\forall x \in IR_+$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
   c) Montrer que ; $\forall x \in IR_+$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$,

en déduire que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\ |u_n - \alpha|$.

d) Montrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n\ |u_n - \alpha|$.

En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0;1]$. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

c) Montrer que ; $\forall\ x \in\ ]0\ ;1]$, on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

d) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $]0\ ;1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.

II) Pour tout x de $]0\ ;\frac{\pi}{2}]$, on pose $g(x) = f^{-1}(\sin x)$.

1) Montrer que ; $\forall\ x \in\ ]0\ ;\frac{\pi}{2}]$; on a : $g(x) = \dfrac{1}{\sin x} - 1 + \cot g x$.

2) Montrer que g réalise une bijection de $]0\ ;\frac{\pi}{2}]$ sur $\mathbb{R}_+$. On note g^{-1} la réciproque de g.

3) a) Soit y de $]0\ ;\frac{\pi}{2}]$. On pose $x = g(y)$. Etablir que $\sin y = f(x)$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-2}{x^2+2x+2}$.

III) Pour tout x de $]0\ ;1\ ]$, on pose $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x}\ )$.

1) a) Montrer que h est dérivable sur $]0\ ;1[$ et calculer $h'(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de h à gauche en 1.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\, h\left(\frac{1}{k}\right)$.

Montrer que ; $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \sqrt{2n}$. Donner alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{\sqrt{n}}$.