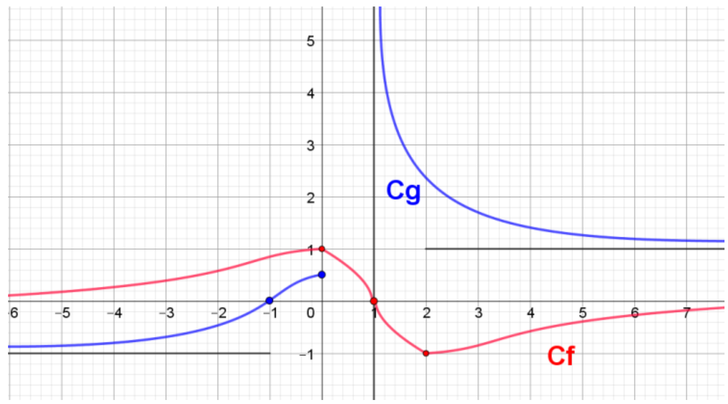
L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 21 / 11 /2020	**Durée : 2heures**	**Classe : 4M$_1$**

Exercice N°1 **(6points)**



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé telles que :

- f est définie sur IR et g est définie sur $]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$
- Les droites d'équations respectives : y = -1 et y = 1 sont des asymptotes à la courbe de g.
- La courbe de g passe par le point $(0,\frac{1}{2})$.
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

1/ Par lecture graphique :

a) Déterminer l'image de $]-\infty,1[$ par f.

b) Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de gof.

2/ a) Montrer que gof est continue sur]1,2[

b) Montrer que gof est strictement décroissante sur]1,2[

3/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que l'équation : gof(x) = $\frac{1}{2n}$ admet, dans]1,2[une solution unique a_n .

b) Déterminer la monotonie de la suite (a_n) .

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°2 **(7 points)**

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2/ Soit W la suite définie sur IN* par $W_n = U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1}$

a/ Montrer que W est une suite géométrique de raison (-1)

b/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1} = (-1)^n$

3/ On considère la suite V de terme général $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_{n+1} - V_n) = 0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1} - V_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}.U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{2n} \leq V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et quelles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice N°3 (7 points)

NB : Les parties A/ et B/ de cet exercice sont indépendantes !

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,

A/ a) Résoudre dans C, l'équation (E_θ) : $z^2 + i\,(e^{i\theta} - 2)\,z + e^{i\theta} - 1 = 0$; $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi[$

b) Donner les solutions de (E_θ) sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe ($z = i - i\,e^{i\theta}$) lorsque θ varie dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

B/ On considère les points : M_1 ,M_2 , M et M' d'affixes respectives $z_1 = re^{i\theta}$, $z_2 = r\,e^{-i\theta}$, $z = \frac{z_1^2}{z_2}$ et $z' = z_2 + \frac{z_1^2}{z_2}$

où $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et r est un réel strictement positif.

1) a) Montrer que les points M_1 , M_2 et M sont deux à deux distincts.

b) Montrer que les points M , M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre 0 et que $M_1M_2 = M_1M$.

c) Exprimer $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M})$ en fonction de θ

En déduire l'ensemble des points M pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral.

2) a) Montrer que les points O, M_1 et M' sont alignés.

b) Montrer alors que le milieu I de [OM'] est le projeté orthogonal de M_2 sur (OM_1).