Lycée othmen chatti Msaken *Prof : Bahloul Ridha*

Datte : 03/12/2020 *Devoir de contrôle n°1* *classe : $4^{éme}$ Math1*

Durée : 2h

EXERCICE N°1 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct **(o ,** $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$) .Soit **I** le point d'affixe **1** et Soit Δ = **{ M (z) /** $|z-1| = |z|$ **}**.

1) Déterminer et construire Δ.
2) Soit **A (a)** où **a** est un nombre complexe.
   a) Montrer que : si **A** ϵ Δ alors **a – 1 = -** $\bar{a}$ **.**
   b) En déduire que : si **A** ϵ Δ alors **arg (a – 1)** $\equiv$ π – **arg (a) [2** π**].**
3) Soit l'équation **(E) :** $z^3 = i(z-1)^3$ et on note **M (z).**
   a) Vérifier que si **z** est une solution de **(E)** alors le point **M** $\in \Delta$.
   b) On pose θ**= arg (z) où** $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que : $3\,\theta \equiv \frac{\pi}{2} + 3(\pi - \theta)[2\pi]$.
   c) Déduire alors les valeurs possibles de θ.
4) Résoudre l'équation **(E).** Donner les solutions sous forme algébrique.
   Construire les points images des solutions.

EXERCICE N°2: (5 points)

A) On considère l'équation : **(E) :** $z^2 + (e^{2i\theta} - i\,e^{i\theta})\,z - i\,e^{3i\theta} = 0$**.**
   1) Vérifier que **i** $e^{i\,\theta}$ est une solution de **(E).**
   2) En déduire l'autre solution de **(E).**

B) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct **(o ,** $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **) , (unité 5 cm).**

On considère les points **A, B et C** d'affixes respectifs **1, b = i** $e^{i\theta}$ et **c = -** $e^{i2\theta}$ **où** $\theta \epsilon [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$**.**

Et soit **H** le point d'affixe **h = 1 + b + c.**

1) Ecris **b** et **c** sous forme exponentielle. En déduire l'ensemble décrit par **B.**
2) Montrer que les points **A, B** et **C** sont non alignés.
3) Montrer que le nombre complexe $\frac{1+i\,e^{i\theta}}{1-i\,e^{i\theta}}$ est imaginaire.
4) En déduire que le point **H** est l'orthocentre du triangle **ABC.**
5) Donner alors un procédé de construction puis construire le point ω d'affixe

   $(1 + i\,e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}})$**.**
6) Déterminer les valeurs de θ pour que **H** soit confondu avec **O.**

EXERCICE N°3 : (5 points)

Soit **f** la fonction définie sur IR par : **f (x) =** $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+4} - 3(x+1) & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1-x-\cos(\frac{\pi x}{2})}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Montrer que : $\forall\, x > 0$; *on a* : $-1 \leq f(x) \leq \frac{2-x}{x}$, en déduire la limite de **f** en +∞.
2) Montrer que la droite Δ: $y = -4x - 4$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de - ∞.
3) Montrer que **f** est continue en **0**.
4) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(\frac{f(x)}{4} + x + 1)}{f(x) + 4x+4}$,

   $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{f(x)+1}{x}\right)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(f(x)+1)+1}{f(x)+1}\right)$.

5) a) Montrer que l'équation **f (x) =** $-\frac{1}{2}$ admet dans **] 2 , 3 [** au moins une solution x_0.

   b) Vérifier que : $\tan(\frac{\pi}{2} x_0) = \dfrac{\sqrt{4x_0 - x_0^2}}{x_0 - 2}$.

   c) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) + \frac{1}{2}}{x - x_0}\right)$.

EXERCICE N° 4 : (5 points)

On considère les suites **(S_n) et (U_n)** définie par **:** $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{2^k}$ **et** $U_n = S_n + \frac{(n-2)^2}{2^n}$, **n ≥ 2.**

1) Soit **(V_n)** la suite définie sur **IN** par : $V_0 = 1$ **et** $V_{n+1} = 2V_n + n - 1$ **.**
   a) Montrer que : $\forall\, n \geq 1$, $V_n > n$. En déduire la limite de **(V_n).**
   b) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \geq 0$, $V_{n+1} = 2^n S_n + 1$.
   c) Montrer que la suite **(W_n)** définie par : $W_n = V_n + n$; $n \geq 0$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   d) Montrer alors que : $\forall\, n \geq 1$; $S_{n-1} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$.
2) Soit **(a_n)** la suite définie sur **IN** par : $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.
   a) Montrer que : $a_{n+1} \leq \frac{8}{9} a_n$, pour tout $n \geq 3$.
   b) Déduire que **(a_n)** est convergente vers **0** et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)$.
   c) Exprimer U_n en fonction de **n** puis calculer sa limite.