L. R.F.B.Monastir A.S :2019/2020

Devoir de contrôle N°1

Mathématiques

Classe : 4ème Math

Mr Zrafi

Durée: 2.h

Exercice N°1 : (6 pts)

On considère la suite (U_n) définie sur ¥ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n} \quad \forall\, n \in ¥ \end{cases}$

1) Montrer que $\forall\, n \in$ ¥ , on a : $2 \leq U_n$.

2)- a/ Montrer que $\forall\, n \in$ ¥ , on a : $\left| U_{n+1} - 3 \right| \leq \dfrac{1}{2} \left| U_n - 3 \right|$

b/ En déduire que $\forall\, n \in$ ¥ , on a : $\left| U_n - 3 \right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c/ Trouver, alors, la limite de la suite (U_n).

3)- Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a/ Montrer que $\forall\, n \in$ ¥ , on a : $3n - 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq S_n \leq 3n + 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b/ En déduire la limite de S_n .

c/ Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

4)- Soit (V_n) la suite définie sur ¥ par : $V_n = U_{2n}$. et soit f la fonction définie sur ‹$^*_+$

par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$.

a/ Etudier les variations de la fonction f sur ‹$^*_+$.

b/ Montrer que $\forall\, n \in$ ¥ , on a : $V_{n+1} = (f \circ f)(V_n)$.

c/ Montrer par récurrence que (V_n) est suite croissante et majorée par 3.

d/ En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°2: (4 pts)

Soit la fonction f définie sur ‘ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(x-1)}{(x-1)}+2 & \text{si } x<1\\ \dfrac{2-\sqrt{x^2-1}}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

1) a) Montrer que : $\forall\ x<1$ on a : $2\leq f(x)\leq 2-\dfrac{1}{x-1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que f est continue en 1

3) Soit g la restriction de f à sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et h la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=g\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

a) Montrer que h est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

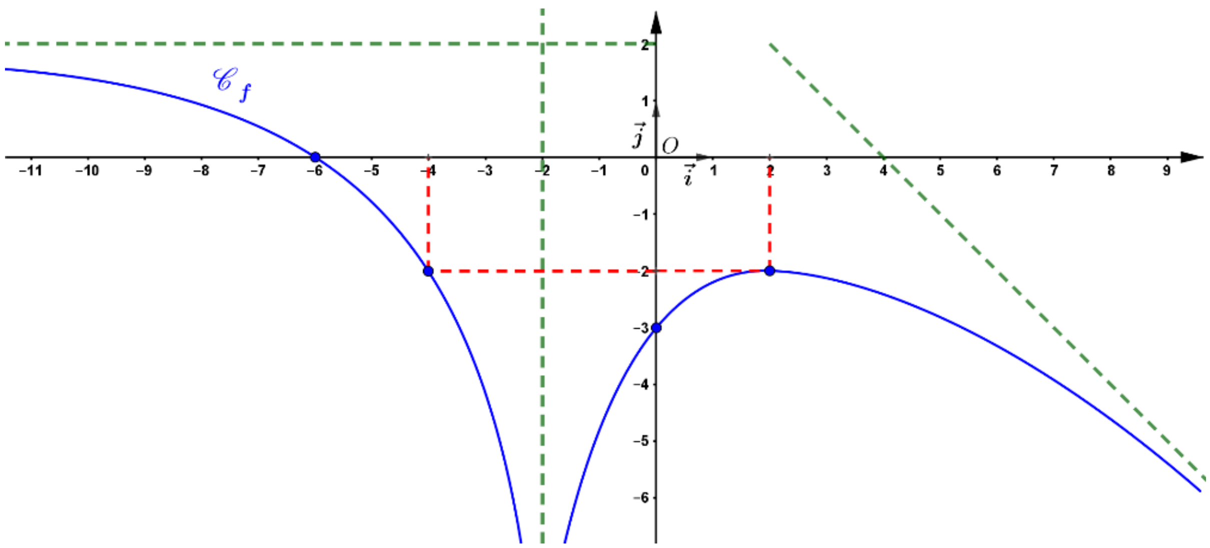
b) Montrer que l'équation h(x)=0 admet une solution $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{12}\right[$

Exercice N°3: (4 pts)

Dans la figure ci desssous, on donne la courbe ζ_f représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f . ζ_f admet :

- Une asymptote horizontale d'équation : $y=2$ au voisinage de $-\infty$.
- Une asymptote d'équation : $y=-x+4$ au voisinage de $+\infty$.
- Une asymptote verticale d'équation : $x=-2$.

En utilisant le graphique :



1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x)+x+4 \;;\; \lim_{x\to-\infty} \frac{5-x^2}{f(x)-2} \text{ et } \lim_{x\to(-6)^-} \frac{1-\cos\left(\sqrt{f(x)}\right)}{f(x)}.$$

2) a) Déterminer le domaine de définition de $f\circ f$.

b) Montrer que la courbe représentative de $f\circ f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) La fonction $f\circ f$ est-elle prolongeable par continuité en -2

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-2,2[$ par $f\circ f$ puis donner le sens de variation de $f\circ f$ sur $]-2,2[$.

Exercice N°4: (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

on donne les points $A(-i)$ et $B(i)$.

Soit f l'application du plan $P\setminus\{A\}$ dans $P\setminus\{B\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$

tel que $z'=\dfrac{iz+1}{z+i}$.

1°) On suppose que $M\neq A$ et $M\neq B$.

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.

b) En déduire l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $z'\in IR^*$.

2°) Soit $M(z)\in P\setminus\{A,B\}$. On pose N le point d'affixe $z+2i$.

a) Vérifier que $ABNM$ est un parallélogramme.

b) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BN},\vec{u}}\right)[2\pi]$.

c) On donne **en annexe,** le cercle de diamètre $[AB]$ et on a placé un point M d'affixe z.

Construire alors M' le point associé à M.

3°) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(iz+1)^3=(z+i)^3$.

a) Soit $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que : $\dfrac{i\tan\alpha+1}{\tan\alpha+i}=e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

b) En déduire les valeurs de $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan\alpha$ soit une solution de (E).

c) Montrer que z est une solution de (E) équivaut $z^3+3z^2-3z-1=0$.

d) Résoudre l'équation $z^3+3z^2-3z-1=0$.

e) En déduire la valeur exacte de $\tan\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Feuille annexe à rendre avec la copie