

Exercice N°1 : (6 pts)

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{3}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leq U_n$.

2)- a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2} |U_n - 3|$

b/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c/ Trouver, alors, la limite de la suite (U_n) .

3)- Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $3n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} \leq S_n \leq 3n + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

b/ En déduire la limite de S_n .

c/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

4)- Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = U_{2n}$, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^*

$$\text{par } f(x) = 2 + \frac{3}{x}.$$

a/ Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* .

b/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $V_{n+1} = (f \circ f)(V_n)$.

c/ Montrer par récurrence que (V_n) est suite croissante et majorée par 3.

d/ En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°2: (4 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)} + 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2 - \sqrt{x^2 - 1}}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que : $\forall x < 1$ on a : $2 \leq f(x) \leq 2 - \frac{1}{x-1}$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que f est continue en 1

3) Soit g la restriction de f à sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et h la fonction définie

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = g\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

a) Montrer que h est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

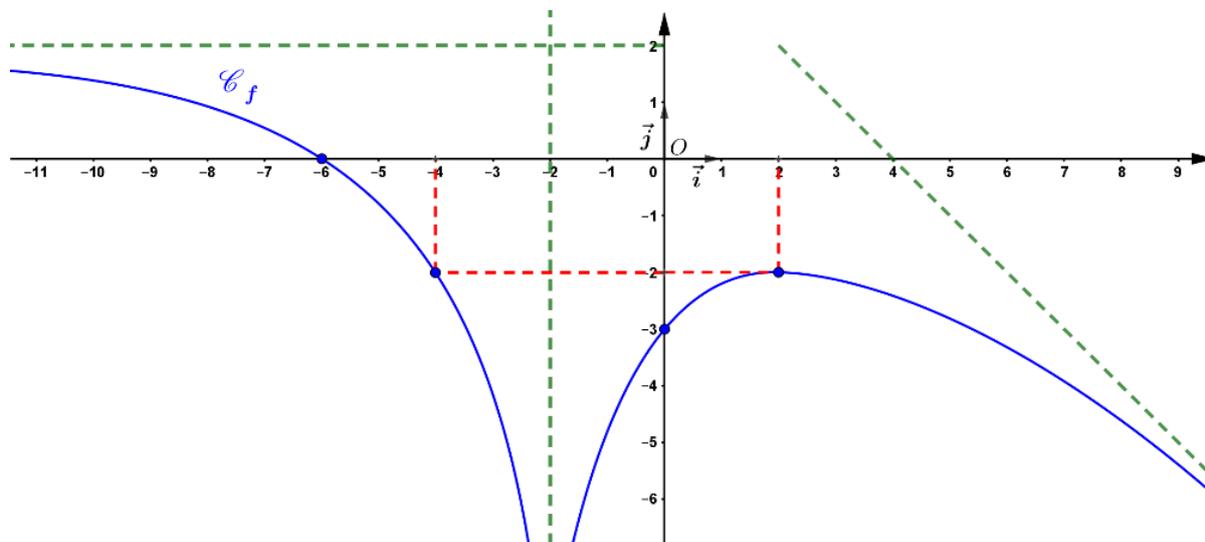
b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right[$

Exercice N°3: (4 pts)

Dans la figure ci dessous, on donne la courbe ζ_f représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f . ζ_f admet :

- Une asymptote horizontale d'équation : $y = 2$ au voisinage de $-\infty$.
- Une asymptote d'équation : $y = -x + 4$ au voisinage de $+\infty$.
- Une asymptote verticale d'équation : $x = -2$.

En utilisant le graphique :



1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x + 4 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x^2}{f(x)-2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-6)^-} \frac{1 - \cos(\sqrt{f(x)})}{f(x)}.$$

2) a) Déterminer le domaine de définition de $f \circ f$.

b) Montrer que la courbe représentative de $f \circ f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) La fonction $f \circ f$ est-elle prolongeable par continuité en -2

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-2,2[$ par $f \circ f$ puis donner le sens de variation de $f \circ f$ sur $]-2,2[$.

Exercice N°4: (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, u, v)

on donne les points $A(-i)$ et $B(i)$.

Soit f l'application du plan $P \setminus \{A\}$ dans $P \setminus \{B\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$

$$\text{tel que } z' = \frac{iz+1}{z+i}.$$

1°) On suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$.

a) Montrer que $(\overset{r}{u}, \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} OM') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} MA, \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} MB) [2\pi]$.

b) En déduire l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}^*$.

2°) Soit $M(z) \in P \setminus \{A, B\}$. On pose N le point d'affixe $z+2i$.

a) Vérifier que $ABNM$ est un parallélogramme.

b) Montrer que $(\overset{r}{u}, \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} BM') \equiv (\overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} \overset{u}{\$} BN, \overset{r}{u}) [2\pi]$.

c) On donne **en annexe**, le cercle de diamètre $[AB]$ et on a placé un point M d'affixe z .

Construire alors M' le point associé à M .

3°) Soit dans \mathbb{C} l'équation $(E) : (iz+1)^3 = (z+i)^3$.

a) Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Montrer que : $\frac{i \tan \alpha + 1}{\tan \alpha + i} = e^{i \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}$.

b) En déduire les valeurs de $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tels que $\tan \alpha$ soit une solution de (E) .

c) Montrer que z est une solution de (E) équivaut $z^3 + 3z^2 - 3z - 1 = 0$.

d) Résoudre l'équation $z^3 + 3z^2 - 3z - 1 = 0$.

e) En déduire la valeur exacte de $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

Feuille annexe à rendre avec la copie

