


<i>Lycée Takelsa</i>		<i>Devoir de contrôle N°1</i>	
<i>Prof : Ziadi Mourad</i>			
<i>Classe : 4^{ème} Math</i> <i>Date : le 02/11/2016</i>	<i>Durée : 2 h</i>	<i>Epreuve : Mathématiques</i>	

Exercice N°1 : (03pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

- 1) Si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes ,alors elles sont bornées.
- 2) Le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine 2016^{ième} de l'unité.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$; alors le produit des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est égal à $(-1)^{n-1}$.

Exercice N°2 : (06pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x} \cos x}{x+1} \dots \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} \dots \text{si } x < 0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\frac{1 - \sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1 + \sqrt{x}}{x+1}$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.Interpréter géométriquement ce résultat.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \frac{1}{2}x$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.
- 3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 4) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f \circ f(x)$
- 5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.
b) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$.
- 6) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice N°3 :(05pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit m un nombre complexe non nul tel que :

$|m| = r > 0$ et $\text{Arg}(m) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$. On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1.

- 1) Donner la forme exponentielle de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$
- 2) Déterminer r pour que $AM = 1$.
- 3) Soit l'équation $(E_m): mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = 0$
Désignons par M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 les solutions de (E_m) .
 - a) Sans résoudre (E_m) ; montrer que : $\text{Arg}(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12} (2\pi)$
 - b) Montrer que : $m \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} \right) = i$
 - c) Résoudre, alors dans \mathbb{C} l'équation (E_m) .
 - d) Ecrire les solutions de (E_m) sous forme exponentielle.
- 4) Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle en O.
- 5) Dans la suite de l'exercice M étant un point de cercle Trigonométrique.
 - a) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. Montrer que : $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 - b) Résoudre, alors dans \mathbb{C} l'équation $(E'_m): m \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}}\right) \left(\frac{i+z}{i-z}\right)^2 = 1 + i$

Exercice N°4(06pts)

- 1) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$
Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- 2) Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq 1$
 - b) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ on a : $\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$
c) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- 4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k U_k$; $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$
 - a) Calculer V_0 et W_0 .
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n < V_n$
 - c) Montrer que la suite (W_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.
 - d) En déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont convergentes vers la même limite L et que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$.