LYCÉE PILOTE GABES | 4 M1 & 4M2
Devoir de contrôle n° : 1 | 30/10/2013
PROFS : MRS : SOUILAH & DHIAF | Mathématiques | Durée : 2 h

Exercice n° : 1 (4,5 points)

A) *Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.*

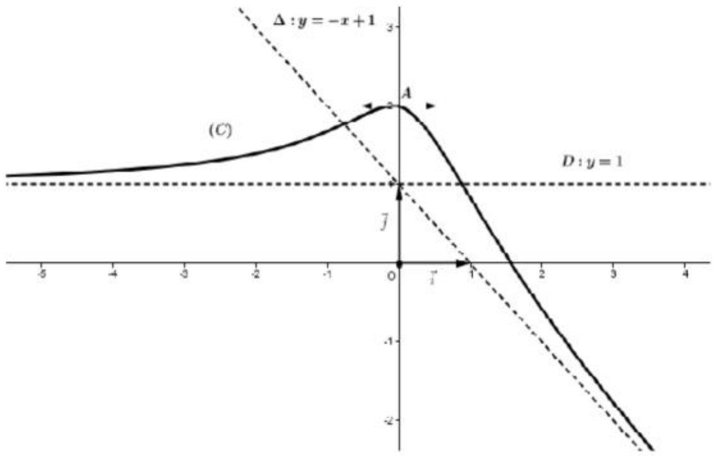
1°) 1 + i est une racine cinquième de – 4 (1 + i).

2°) Soit z un nombre complexe non nul. Si $\arg\left(\bar{z}\right) \equiv \arg\left(z^2\right)\left[2\pi\right]$ alors z est réel.

3°) Soit f une fonction définie sur [-1, 5].
Si f est continue sur]- 1 , 5[et si f(-1).f(5) < 0 alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle]- 1, 5[.

B) On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie et continue sur IR.

- La droite D : y = 1 est une asymptote à (C) au voisinage de - ∞.
- La droite Δ : y = -x + 1 est une asymptote à (C) au voisinage de + ∞.
- Pour tout réel x < 1, f(x) > 1.
- $f(2) = -\dfrac{1}{2}$



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

1°) a) Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\right) f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$

2°) Déterminer : $f\left(\left]-2,+\infty\right[\right)$ et $fof\left(\left]-\infty,+\infty\right[\right)$

Exercice n° : 2 (5 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. Soit A le point d'affixe 2i.

Soit f l'application du plan P privé A dans P qui à tout point M d'affixe z ≠ 2i associe le point M' d'affixe z'

telle que $z' = \dfrac{(1-i)z}{z-2i}$.

1°) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2°) Soit M un point distinct de A et d'affixe z et M' son image par f.

a) Montrer que O, M et M' sont alignés si et seulement si M = O ou $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AM}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

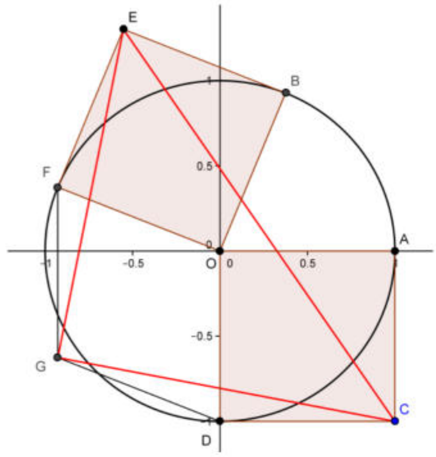
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés.

3°) Soit a un nombre complexe et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe a. On désigne par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.
On note M_1 l'image du point M par $t_{\vec{u}}$ et z_1 son affixe.

a) Montrer que M' = M_1 si et seulement si $z^2+(a-1-i)z-2ia=0$ où z est l'affixe de M.

b) Déterminer a pour qu'il existe un seul point M tel que M' = M_1.

Exercice n° : 3 (3.5 points)



Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On place dans ce repère les points A d'affixe 1 et B d'affixe $b = e^{i\theta}$, où $\theta \in]0, \pi[$.

On construit à l'extérieur du triangle OAB les carrés directs ODCA et OBEF, comme indiqué sur la figure ci-contre.

1°)a) Déterminer les affixes c et d des points C et D.

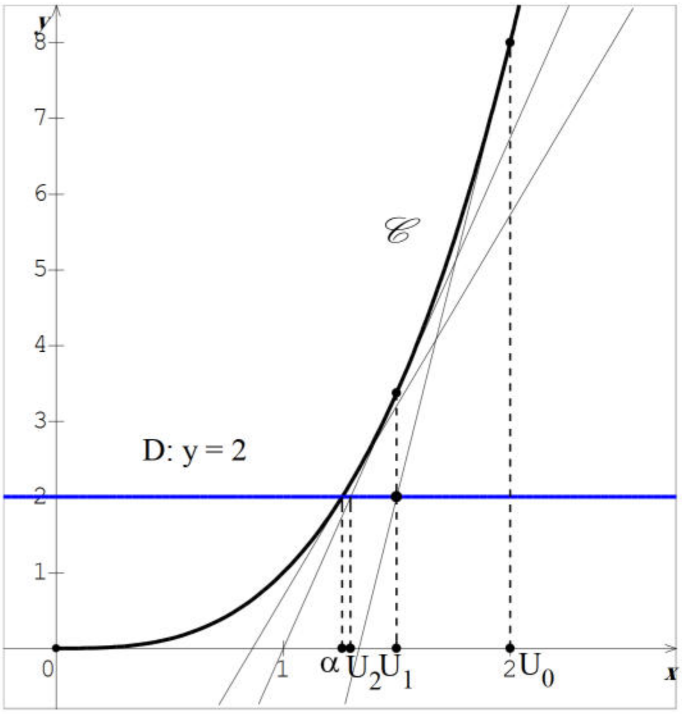
b) Justifier que l'affixe f du point F est : $f = ib$

c) Déterminer l'affixe e de E.

2°) On appelle G le point tel que OFGD soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe g du point G est égale à $i(b - 1)$.

3°) Montrer que le triangle GCE est isocèle et rectangle.

Exercice n° : 4 (7 points)



Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^3$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, D la droite d'équation $y = 2$ et on désigne par α l'abscisse du point d'intersection de D et $\mathscr{C}$.

A) 1°) Quelle est la valeur de α^3.

2°) Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une équation cartésienne de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

b) Montrer que $\dfrac{2a}{3} + \dfrac{2}{3a^2}$ est l'abscisse du point d'intersection de D avec T_a.

3°) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{3} + \frac{2}{3x^2}$$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$. Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq \alpha$, $g(x) \leq x$.

c) Montrer que pour tout réel x de $[\alpha, 2]$

$$0 \leq g(x) - g(\alpha) \leq \frac{1}{2}\left(x - \alpha\right)$$

B) On construit une suite réelle (u_n) comme suit :

- $U_0 = 2$, U_1 est l'abscisse du point d'intersection de D avec la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse U_0.
- U_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de D avec la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse U_n.

1°) Vérifier que $U_1 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = g\left(U_n\right)$

2°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq U_n \leq 2$

3°) Etudier le sens de variation de la suite (U_n). En déduire qu'elle est convergente.

4°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{1}{2}\left(U_n - \alpha\right)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n - \alpha \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

c) Montrer que U_{20} est une valeurs approchée de α à 10^{-6} prés.