Lycée : EL ALIA A scolaire (16-17) :	**Devoir de contrôle n°1** 4maths2	Prof : Lahbib Mohamed Durèe :2h

Exercice1 : (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{z}{\overline{z}}$ soit réel.

2) On considère les points M, N et Q d'affixes respectives, z, $\overline{z}$ et $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$

a) Vérifier que $\dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\dfrac{z}{\overline{z}}$

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2i\,z - (1 - e^{2i\theta}) = 0$ ou' $\theta \in \left]0\ ,\pi\right[$

4) On pose M d'affixe $z = i\,(1 - e^{i\theta})$

a) Ecrire z sous la forme exponentielle

b) Déterminer en fonction de θ, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MN}\ ,\overrightarrow{MQ})$.

c) Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral

Exercice2 : (7,5points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$,on désigne par A et B les points d'affixes respectives : 1 et -1

A tout point M d'affixe $z \neq -1$,on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$

1) a- Montrer que z' est imaginaire pure si et seulement si $|z| = 1$

b- Montrer que pour tout point M distinct de B : $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AM'}) \equiv -(\overrightarrow{BA}\ ,\overrightarrow{BM})\ [2\pi]$.

2) a- Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan d'affixe z tel que : $\arg(z+1) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

b- Δ recoupe le cercle ς de centre O et de rayon 1 au point M d'affixe z ,déduire de ce qui précède une construction du point M' d'affixe z'

3) a-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$ et mettre les solutions sous la forme exponentielle.

b- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^6 - z^3 + 1 = 0$ (on donnera les solutions sous la forme exponentielle)

4) a- Montrer que pour tout réel $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $z' = e^{i\theta}$ si et seulement si $z = i\,\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

b- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 = 1$

Exercice3 : (7points)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

   a- Calculer S_1 et S_2

   b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \sqrt{n}$; en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $V_n = U_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

   Calculer U_2 et V_2

3) a- Vérifier que : $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}$

   b-Montrer que la suite U est croissante

4) Montrer que la suite V est décroisante

5) a- Montrer que les deux suites U et V convergent vers la même limite L

   b-Montrer que : $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) \leq L \leq (2\sqrt{2} - 1)$

Bonne Chance