

Exercice N°1 : (4pts)

A* Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|z| + \bar{z} = 1 - 2i$ alors la valeur de z est :

- a. $-\frac{3}{2} + 2i$ b. $-\frac{3}{2} - 2i$ c. $\frac{3}{2} + 2i$

2) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ , et $z' = \frac{\sqrt{3}-i}{-2\bar{z}}$ alors :

- a. $\arg(z') \equiv \frac{-\pi}{3} + \theta[2\pi]$ b. $\arg(z') \equiv \frac{5\pi}{6} - \theta[2\pi]$ c. $\arg(z') \equiv \frac{5\pi}{6} + \theta[2\pi]$

B* Pour chacune des affirmations suivantes répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin x}{x + \sin 2x} = 1$

2) l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = 4 + 4i$ sont les nombres complexes

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5})} \text{ ou } k \in \{0,1,2,3,4\}$$

Exercice N°2 : (6pts)

Dans le plan P complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 ou a est nombre complexe différent de 1 . On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et f l'application de $P \setminus \{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que : $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation

$$(E): z^2 - 2z + a = 0$$

2) On prend $a = 1 + e^{i2\theta}$, ou $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

- a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)
b. Mettre chacune de solutions de (E) sous forme exponentielle

3) On note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - ie^{i\theta}$, ou $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

- a. Déterminer et construire les ensembles décrits par M_1 et M_2 quand θ varie dans $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$
b. Montrer que pour tout $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ le triangle OM_1M_2 est rectangle en O
c. Déterminer θ dans pour que $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ le triangle OM_1M_2 soit isocèle

4) On suppose dans cette question que : $a = -1$.

- a. Montrer que z' est imaginaire si et seulement si $|z| = 1$. Expliciter z' lorsque : $z = e^{i\theta}$.
b. Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0[2\pi]$
c. Déterminer alors la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.
d. En déduire la construction du point M' image d'un point M donné de $\mathcal{C} \setminus \{B\}$

Exercice N°3 : (4pts)

1) On donne deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N}^* par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$$

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ on a: $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\frac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n}$

2) On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - 1 + \cos x$.

Etudier les variations de f et montrer que: $1 - x \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) a. Vérifier que $1 - \frac{1}{\sqrt{k+n}} \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) \leq 1$ et que $1 - \frac{v_n}{n} \leq u_n \leq 1$

b. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice N°4 : (6pts)

Dans la figure suivante on a représenté dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe \mathcal{C} d'une fonction f définie continue et dérivable sur \mathbb{R} et une droite D d'équation $D: y = 1$.

*La droite D est une asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$

* La courbe \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $(+\infty)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x)$

2) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$

b. Etudier chacune des limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{ax-2}{x+1}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1 - \cos(f(x))}{f^2(x)}$.

c. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

d. Déterminer $f(-\infty, 0]$, $f([0, +\infty[$ et $f(-\infty, +\infty[$

3) On donne une fonction g définie sur \mathbb{R} par:
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = a \frac{\sin(\sqrt{x+4}-2)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ ou } a \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que: $\forall x > 0, |g(x)| \leq \frac{|a|}{x}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.

c. Déterminer le réel a pour que g soit continue en 0.

d. En déduire le domaine de continuité de g pour la valeur de a trouvé

