Lycée secondaire Bennane-Bodheur	Devoir de controle n °1	Niveau : $4^{ème}$ Math
Prof : Bouhouch Ameur	Le 06/ 11/ 2016	Durée : 120mn

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante lors de l'appréciation des copies….
Le sujet comporte trois pages numérotées de 1 à 3 et une page annexe à compléter et à rendre avec Votre copie d'examen.

Exercice n°1: (4pts)

Pour chaque question, une seule réponse correcte est proposée. Ecrire le numéro de la question et la lettre qui lui correspond. Aucune justification n'est demandée.

1) Le nombre des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^{n+1}=(\overline{z})^n$ ($n\in IN^*$) est égal à :

a) $n+1$ b) $2n+1$ c) $2n+2$

2) L'affixe du milieu des points images des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $(1-i)z^2-(1+i)z+\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)=0$ est :

a) réel b) imaginaire c) ni réel,ni imaginaire.

3) Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B et z_C tels que $z_B-z_A=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_C-z_A)$ alors le triangle ABC est :

a) rectangle b) isocèle c) équilatéral

4) Si (U_n) est une suite récurrente définie par $U_o=1$ et $U_{n+1}=U_n+\frac{1}{U_n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n=$

a) 1 b) 0 c) $+\infty$

Exercice n°2: (5pts)

Soit la suite réelle (a_n) définie sur IN par $a_o=1$ et $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$.

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN$, on a : $0<a_n\leq 1$.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

c) En déduire que (a_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{\tan(x)}{1+\sqrt{1+\tan^2(x)}}=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Prouver, alors, que pour tout $n\in IN$, $a_n=\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ puis retrouver $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

3) Pour tout $n\in IN$, On pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, $U_n=S_{2n}$ et $V_n=S_{2n+1}$.

a) Calculer U_0 et V_0.

b) Montrer que pour tout $n \in IN, V_n \leq U_n$.

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante.

d) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et que leur limite commune α est tel que $2-\sqrt{2} \leq \alpha \leq 1$.

Exercice n°3: *(6pts)*

I) Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ): $z^2-(1+i)(1+i+e^{i\theta})z+(-1+ie^{i\theta})(1+e^{i\theta})=0$.

1) Vérifier que $-2ie^{2i\theta}=(1-i)^2 e^{2i\theta}$.

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

II) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soient A et B deux points d'affixes respectives 1 et i.

On considère l'application Ψ de P\{B} dans P, qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$.

1) a) Vérifier que $z'-1=\frac{-2i}{\overline{z}+i}$ pour tout $z \neq i$.

b) En déduire que $AM'.BM=2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c) Montrer que si M décrit le cercle (Γ) de centre B et de rayon 1 alors le point M' décrit un cercle notée (Γ') qu'on précisera.

2) Soient E et F deux points d'affixes respectives $z_E=i+e^{i\theta}$ et $z_F=i(1+e^{i\theta})$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que le triangle BEF est rectangle, isocèle et direct et calculer son aire.

b) Soient E' et F' les images respectives de E et F par l'application Ψ.
Sans déterminer les affixes de E' et F', montrer que le triangle $AE'F'$ est rectangle et isocèle puis calculer son aire.

c) Dans la page annexe (Figure n°1), on donne le cercle (Γ) et les points A et B.
Construire les points E, F, E' et F' dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Exercice n°4: *(5pts)*

Dans la page annexe (Figure n°2), on donne la représentation graphique (ξ), dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur IR\{1}.

* Les droites d'équations $x=1$ et $y=-x$ sont les seules asymptotes à (ξ).
* La courbe (ξ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

A°) Par une lecture graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)+x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)+x$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} fof(x)$.

3) Déterminer $f([0,1[)$.

B°) 1) Pour tout $n \in IN$, montrer que l'équation $f(x) = -n$ admet une solution unique $\alpha_n \in [0,1[$.

2) Montrer que la suite (α_n) est croissante.

3) En déduire que (α_n) est convergente et calculer sa limite.

<u>BON TRAVAIL</u>

PAGE ANNEXE

Nom et prénom : ………………………………………………………………………………………

Figure n°1 :

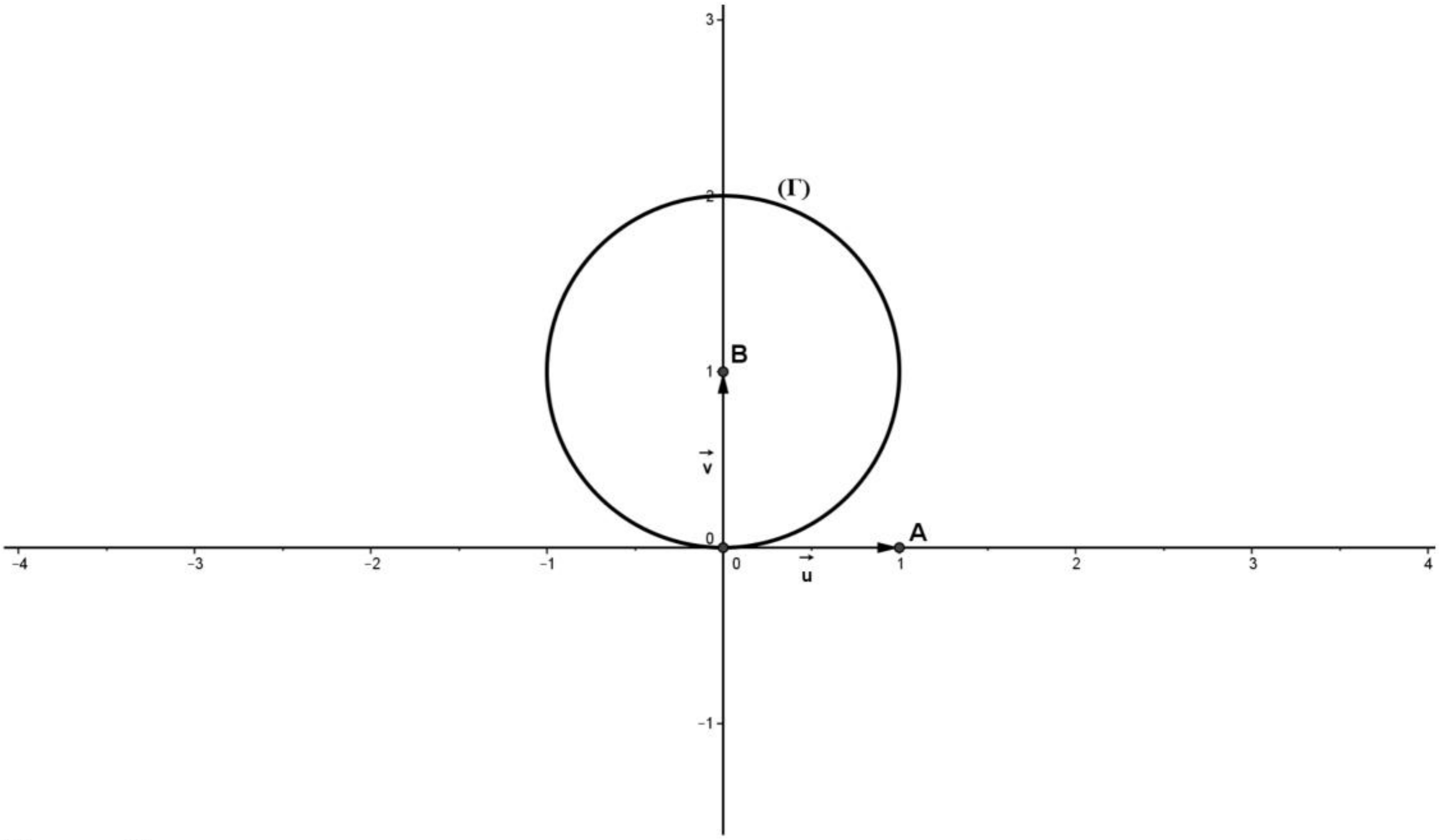

Figure n°2 :