

Devoir de contrôle n°①

4^{ème} MATHS

Prof : NOBBIGH Dhaou

Mardi 10 novembre 2015

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

(7 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Partie A :

1) On donne les points A , B et D d'affixes respectives -1 , i et z_D avec $\text{Re}(z_D) \neq 0$.

On considère l'application f de $P \setminus \{B\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{B\}$ d'affixe z ,

associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

a) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M(z) \text{ telque } z' = -1\}$.

b) Justifier que $|z'| = 1$.

c) Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

d) Construire alors le point $D' = f(D)$. (Page annexe)

2) On prend $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

a) Mettre $e^{i\theta} - i$ puis $e^{-i\theta} + i$ sous la forme exponentielle.

b) En déduire que $z' = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$.

c) En déduire la valeur de θ pour que $(e^{i\theta} - i)^3 = (e^{-i\theta} + i)^3$.

Partie B :

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta z + 2(1 - \sin\theta) = 0$ avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E).

2) On note M_1 , M_2 et N les points d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta} - i$, $z_2 = e^{-i\theta} + i$ et $z_3 = 2\cos\theta$.

a) Montrer que $(M_1M_2) \perp (ON)$ et que le quadrilatère OM_1NM_2 est un losange.

b) Déterminer et construire l'ensemble Ψ des points M_1 lorsque θ varie.

EXERCICE 2

(5 points)

1) Soit la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

d) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

2) La courbe C_g ci-contre est celle d'une fonction g continue sur \mathbb{R} .

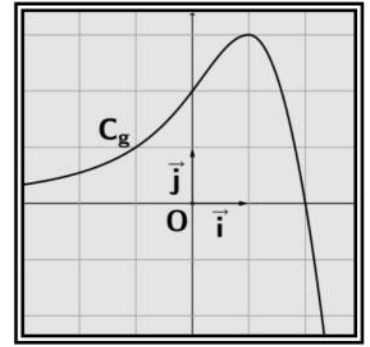
On donne : la droite $(0, \vec{i})$ est une asymptote horizontale à C_g au voisinage de $(-\infty)$.

Par lecture graphique, Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $g(]-\infty, 2[)$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$.

4) Montrer que $f \circ g$ est continue sur $]-\infty, 2[$.

5) Montrer que $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[-1, 1]$.



EXERCICE 3

(8 points)

I. Soit f la fonction définie sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x}$.

1) Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{3}, +\infty[$ on a : $f(x) \leq x$.

2) a) Etudier le sens de variation de f sur $[\sqrt{3}, +\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x \in [\sqrt{3}, +\infty[$, on a : $f(x) \geq \sqrt{3}$.

II. Soient U et V les suites définies sur \mathbb{N} par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et $V_n = \frac{3}{U_n}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq \sqrt{3}$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Montrer que la suite V est croissante.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n + V_n = 2f(U_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n)^2$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n - V_n \leq \frac{1}{4^{2^n - 1}}$.

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $2^n - 1 \geq n$.

b) Montrer alors que les suites U et V sont adjacentes.

c) Sans utiliser la calculatrice justifier que $\frac{168}{97} \leq \sqrt{3} \leq \frac{97}{56}$.

Nom et Prénom : 4^{ème} MATHS N^o

