Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** *Mathématiques*	*Classes : 4 ^{ème} Math $_{1+2}$*
Date : 29 / 10 / 2016	*Profs : A. SAIDI et T. MEDDEB*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : *(7 pts)*

On a représenté sur la feuille annexe, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR.

On sait que :

- La droite des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- La droite D est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$.
- C_f et C_g admettent au voisinage de $+\infty$ deux branches infinies de direction $(O,\vec{j})$.

1) Par lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$a/$ Déterminer le nombre des points d'intersection de C_h avec l'axe des abscisses.

$b/$ Soit M un point de C_f d'abscisse x, la parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M coupe C_g en N.

On pose : $MN=\varphi(x)$, exprimer $\varphi(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.

$c/$ Construire les points de C_h d'abscisses (-1), (-3) et 0.

$d/$ Montrer que la droite d'équation : $y=x+2$ est une asymptote de C_h au voisinage de $-\infty$.

3) Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $x>0$, on a : $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

$b/$ Dresser le tableau de variation de u.

$c/$ Montrer que l'équation : $u(x)=2x$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique α.

4) On pose $\psi(x)=u\circ f(x)$.

$a/$ Déterminer le domaine de définition de ψ.

$b/$ Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \psi(x)$.

$c/$ Montrer que, pour tout $x>1$, on a : $1+\psi(x)>0$.

Exercice n°2 : (6 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = e^{i\theta}$ et $z_B = e^{-i\theta}$, où $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$ *où* $z \neq \cos\theta$.

1) Montrer que la droite $\left(O,\vec{u}\right)$ est globalement invariante par f.
2) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation :

   $(E) : z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$, puis résoudre l'équation (E).
3) $a/$ Montrer que, pour tout $z \neq \cos\theta$ et $z \neq e^{-i\theta}$ on a : $\dfrac{z'-e^{i\theta}}{z'-e^{-i\theta}} = \left(\dfrac{z-e^{i\theta}}{z-e^{-i\theta}}\right)^2$.

   $b/$ En déduire que si $M \neq A$ et $M \neq B$ on a :

   $$\frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi].$$
4) $a/$ Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

   $b/$ Le cercle $\mathscr{C}$ coupe $\left(O,\vec{u}\right)$ en E et F. Montrer que E et F ont la même image par f qu'on précisera.

Exercice n°3 : (7 pts)

On considère la suite U définie sur IN^* par : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \text{ pour tout } n \in IN^* \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n < 1$.

   $b/$ Montrer que U est strictement croissante.

   $c/$ En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.
2) On pose, pour tout $n \geq 1$, $V_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left[2^{n+1}U_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k\right]$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k < 2^{n+1}U_{n+1}$, en déduire que la suite V est croissante.

   $c/$ En utilisant la relation précédente, montrer que $V_n < 2$ et que la suite V est convergente.
3) $a/$ Vérifier que, pour tout $n \geq 1$ on a : $\dfrac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \dfrac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$, en déduire que : $V_n = \dfrac{2}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

   $b/$ En déduire la limite de la suite V.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n° 1 (29 – 10 – 2016)

Nom et prénom :…………………………………………………..…   Classe : 4 ème Math 1 + 2