

Exercice1 : (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z}{\bar{z}}$ soit réel.
- 2) On considère les points M, N et Q d'affixes respectives, z , \bar{z} et $\frac{z^2}{z}$
 - a) Vérifier que $\frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\frac{z}{z}$
 - b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $z^2 - 2iz - (1 - e^{2i\theta}) = 0$ ou $\theta \in]0, \pi[$
- 4) On pose M d'affixe $z = i(1 - e^{i\theta})$
 - a) Ecrire z sous la forme exponentielle
 - b) Déterminer en fonction de θ , une mesure de l'angle orienté $(\overline{MN}, \overline{MQ})$.
 - c) Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral

Exercice2 : (7,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A et B les points d'affixes respectives : 1 et -1

A tout point M d'affixe $z \neq -1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+1}$

- 1) a- Montrer que z' est imaginaire pure si et seulement si $|z|=1$
b- Montrer que pour tout point M distinct de B : $(\overline{AB}, \overline{AM'}) \equiv -(\overline{BA}, \overline{BM}) [2\pi]$.
- 2) a- Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan d'affixe z tel que : $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
b- Δ recoupe le cercle ζ de centre O et de rayon 1 au point M d'affixe z , déduire de ce qui précède une construction du point M' d'affixe z'
- 3) a- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$ et mettre les solutions sous la forme exponentielle.
b- En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^6 - z^3 + 1 = 0$ (on donnera les solutions sous la forme exponentielle)
- 4) a- Montrer que pour tout réel $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $z' = e^{i\theta}$ si et seulement si $z = i \cotan(\frac{\theta}{2})$
b- En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 1$

Exercice3 : (7points)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

a- Calculer S_1 et S_2

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \sqrt{n}$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N}^* par $U_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $V_n = U_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Calculer U_2 et V_2

3) a- Vérifier que : $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}$

b-Montrer que la suite U est croissante

4) Montrer que la suite V est décroissante

5) a- Montrer que les deux suites U et V convergent vers la même limite L

b-Montrer que : $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) \leq L \leq (2\sqrt{2} - 1)$

Bonne Chance