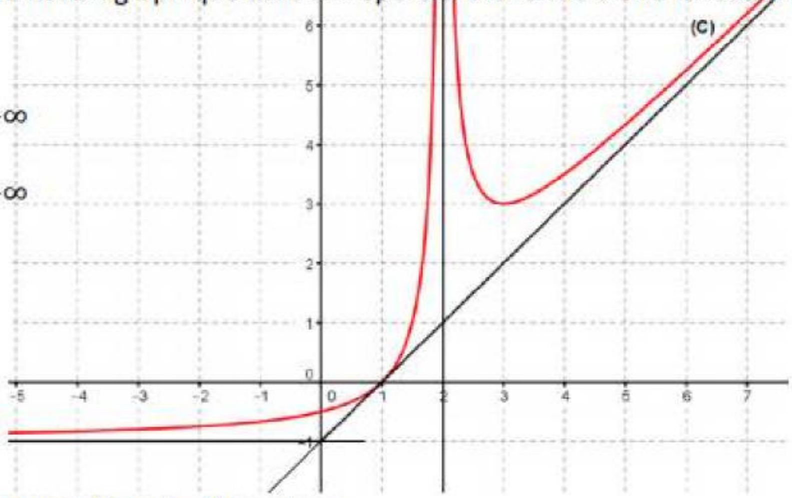
Lycée Ebn Elhaythem Matmata N		Devoir de contrôle N°: 1 Mathématiques
Mr : Kayel : M	27/10/2016	
4Maths	2heures	

Exercice 1:

Le graphique ci-dessous (C) est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur IR\{2}.

- ✓ La droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
- ✓ La droite $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$
- ✓ La droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (C)



1. A l'aide du graphique et des renseignements fournis, déterminer

   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-x}$: $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{(f\circ f)(x)}{f(x)}$

   c. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$

2. Soit la fonction g : $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $h = g \circ f$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de h .

   b. Montrer que h est prolongeable par continuité en 2

Exercice N°2

Soit n un entier naturel non nul, f_n la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $f_n(x) =$ x + n - n tan(x)

1/ a)étudier les variations de f_n sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

b) en déduire que l'équation, f_n (x) = 0 admet une seule solution α_n dans $[0,\frac{\pi}{2}[$

c) vérifier que $\alpha_n \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et que : $tan\,(\alpha_n) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}$

2/on définit la suite (α_n) pour n $\in IN^*$

a) montrer que pour tout x $\in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$et pour tout n $\in IN^*$ on a : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$

b) déduire alors que (α_n) est décroissante

c) prouver que (α_n) est convergente et calculer sa limite

- **Exercice N°3**

Soit (O ,$\vec{U}$,$\vec{V}$) un repère orthonormé et pour tous Z∈ $\mathbb{C}\backslash\{i\}$, on définit l'application ;

$\mathbf{f(z) = i\left(\frac{Z - 2i}{Z - i}\right)}$; soit les points M , A et B d'affixes Z , 2i et i

1/ a)montrer que $\forall Z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ on a :$|f(z)| = \frac{AM}{BM}$

b) montrer que $\forall Z \in \mathbb{C}\backslash\{2i, i\}$ on a : arg $(f(z)) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2/ déterminer les deux ensembles suivants

E= { M(Z) tels que $|f(z)| = 1$ } et F= { M(Z) tels que f(Z) est imaginaire pur }

3/ montrer que $\forall Z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ on a : $|f(z) - i| = \frac{1}{|Z-i|}$ $et\ \arg(f(z) - i) \equiv -\arg(Z - i)\ [2\pi]$

4/ a)montrer que si M ∈ $\mathscr{C}$ (B, $\frac{1}{2}$) alors le point M'd'affixe $f(Z)$ appartient à un cercle que l'on précisera

b) construire alors le point M' a partir du point M (avec justification)

Exercice On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_\theta) : \quad z^2 - 2i\mathbf{sin}\,(2\theta)z - 1 = 0$$

où θ est un réel donné.

1– Vérifier que $e^{2i\theta}$ est une solution de (E_θ) puis déduire la deuxième solution (On pourra l'écrire sous forme exponentielle).

2– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E'_\theta) : \quad z^4 - 2i\mathbf{sin}\,(2\theta)z^2 - 1 = 0$$

où θ est un réel donné.(On donnera les solutions sous forme exponentielle)

3– Montrer que les images dans le plan complexe des solutions de (E'_θ) sont les sommets d'un rectangle.

Bon travail