Exercice 1: (2 points)

Vrai ou faux. Justifier vos réponses

1) (u_n) étant une suite définie sur IN.

a) (u_n) est convergente si et seulement si $(u_n)^2$ est convergente.

b) Si lim (u_n) = - ∞ alors la suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang.

2) Soient a et b deux nombres complexes de module 1 et z un nombre complexe.

Ré($\frac{z+ab\,\bar{z}-a+b}{a-b}$) $= -1.$

Exercice 2:(6 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) Soit u une suite à valeur dans] 0, 1[telle que pour tout n : $4\,u_{n+1} > \frac{1}{1-u_n}$.

a) Etudier la monotonie de la suite (u_n). .

b) Déduire que (u_n) est convergente.

c) Montrer que lim $(u_n) = \frac{1}{2}$.

2) Soit v la suite à valeur dans IR+ définie par $v_1 = 1$ et $(v_{n+1})^2 = 1 + v_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence)

b) Montrer que pour tout $n \geq 1,\ 1 \leq v_n \leq 2.$

c) Prouver que la suite (v_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

d) Déduire alors la limite de la suite w définie par :

$$w_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots.+\sqrt{1}}}}\ ;\ (\text{ n fois } 1)$$

Exercice 3:(6 points)

On a tracé ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) , les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g telles que :

- f est continue sur IR et g est continue sur]-∞ , -2] U [2, +∞ [.
- Cf admet une asymptote oblique la droite d : y = x au voisinage de +∞ et -∞. .
- Cg admet une branche infinie de direction (O, $\vec{j}$) au voisinage de +∞.
- Cg admet une asymptote d'équation y = -1 au voisinage de -∞. .
- Cf passe par les points (1, 2) ; (-1, -2) ; ($\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$).
- Cg passe par les points (2, 0) et (-2, 0).

1) Déterminer le domaine de définition de g o f et de f o g.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x-1)\ ;\ \lim_{x\to1} f\left(\frac{\sqrt{2x+2}+x-3}{x-1}\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{gof(x)}{x}\quad ;\ \lim_{x\to0^-} g\left(\frac{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right).$$

3) a) Etudier les variations de g o f sur [1, +∞[.

b) Déduire que l'équation g o f(x) = 2 admet une seule solution a dans]1, +∞[.

c) Placer a sur l'axe des abscisses.

4) a) Construire sur le graphique le point de la courbe g o f d'abscisse 2.

b) Tracer une allure de la courbe de g o f dans le même graphique sur [1 ; +∞[.

Exercice 4:**(6 points)**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :
(E): $2z^2 - (1 + i)z + 1 + i = 0$ et (F): $2z^3 - 3(1 + i)z^2 + (1 + 3i)z - 2i = 0$.

1) Soit $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; résoudre dans C l'équation:

$$2e^{i\alpha}z^2 - (1 + ie^{i\alpha})z + i + e^{i\alpha} = 0.$$

2) On considère les points M, M' et N d'affixes respectives :

$z = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} - i)$, $\bar{z}$ et $\cos(\alpha)$ où $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Ecrire z sous forme exponentielle.
b) Déterminer l'ensemble des points M quand α varie.
c) Montrer que OMNM' est un losange.
d) Déterminer α pour que OMNM' soit un carré.

3) a) Montrer que l'équation (F) admet une solution z_0 dont le point image est situé sur la première bissectrice $\Delta: y = x$.
b) Factoriser $P(z) = 2z^3 - 3(1 + i)z^2 + (1 + 3i)z - 2i$
c) En utilisant 1) achever la résolution de l'équation (F).