| | | |
|---|---|---|
| **Epreuve :** Mathématiques Durée : 2 heures | **Lycée de Sbeïtla** **Devoir de contrôle N°1** **Classe : 4ème Maths** Année scolaire : 2015 // 2016 | **Professeur :** **Elabidi Zahi** |

## Exercice 01 : (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)-1 & \text{si } x<0 \\ 2x-\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

On désigne par $\zeta$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que pour tout $x<0$, ona : $-1-x^2\leq f(x)\leq x^2-1$

b) En déduire que f est continue en 0

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ . En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $]-3;-2[$

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite d'équation $y=x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à $\zeta$ au voisinage de $+\infty$

## Exercice 02 : (7points)

Soit $(u_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+2}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n>2$

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante

c) En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-2\leq\dfrac{3}{4}(u_n-2)$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n-2\leq 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ Retrouver ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq S_n-n(n+1)\leq 6n\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$

**Exercice 03 : (7points)**

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - i(2-e^{i\theta})z + e^{i\theta} - 1 = 0$ , où $\theta$ est un réel de $]0;2\pi[$

a) Résoudre l'équation $(E)$

b) Ecrire les solutions de $(E)$ sous forme exponentielle

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

On désigne par $\zeta$ le cercle de centre B et de rayon 1

Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ vers $P \setminus \{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = \dfrac{\overline{z} - i}{\overline{z} + i}$

a) Montrer que f n'a aucun point invariant

b) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a : $z' - 1 = \dfrac{-2i}{\overline{z} + i}$

c) En déduire que $\forall$ $M \in P \setminus \{B\}$ , on a : $AM'.BM = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

d) En déduire une construction de l'image d'un point M de $\zeta$