Prof	*Mechmeche Imed*	*Devoir de contrôle N°1*	**Matière**	*Maths*
Lycée	*Borj-cedria*		**Date**	*28/10/2013*
Niveau	*4ème Maths1*		**Durée**	*2 h*

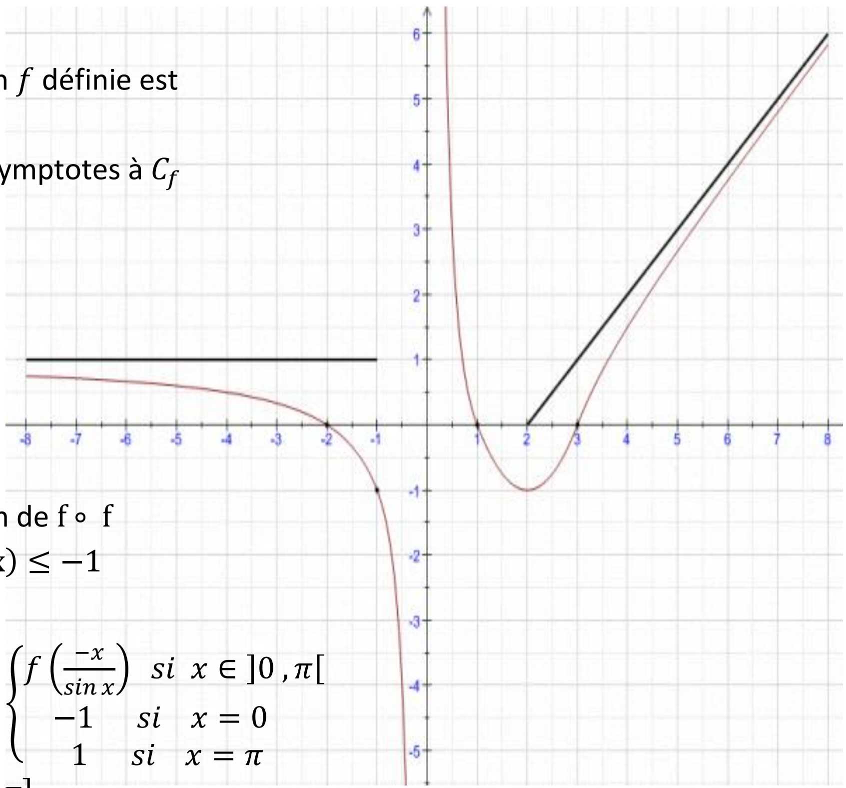
Exercice 1 : (3 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Soient deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, telles que :
   la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
   la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote à C_g en $+\infty$.
   alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g\circ f(x)}{x} = 6$
2) Soit une suite U vérifiant : pour tout $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} > A$.
   alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $-iZ + i = 2\sin\theta\, e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$ est le cercle $C_{(0,1)}$

Exercice 2 : (6 pts)

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie est continue sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$ *et* $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f



1) Calculer par lecture graphique :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x - f(x))$
2)
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f ∘ f
   b) Résoudre graphiquement $(f \circ f)(\mathrm{x}) \leq -1$
3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & si\ \ x \in]0, \pi[\\ -1 & si\ \ x = 0 \\ 1 & si\ \ x = \pi \end{cases}$
   a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = \mathrm{x} - 2$ admet une solution dans $[0, \pi]$

Exercice 3 : (6 pts)

Soit l'équation (E_θ) : $Z^2 - 2\cos(2\theta)\ Z + 2i\sin(2\theta) = 0$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $M\left(e^{i2\theta}-1\right)$, $N\left(e^{-i2\theta}+1\right)$, $I(-1)$ et $A(-2)$

a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$

b) Sachant que $Z_N = \overline{Z_M} + 2$, expliquer la construction de N à partir de M

c) Construire les points M et N pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

3) a) Ecrire chacun des nombres Z_M et Z_N sous la forme exponentielle.

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

c) pour quelle valeur de θ a-t-on M , O et N alignés .

4) a) Soit $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point P tel que $OMPN$ soit un parallélogramme.

b) Pour quelles valeurs de θ l'aire de $OMPN$ est-elle maximale.

Exercice 4 : (5 pts)

Soit U la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = {U_n}^2 + 3U_n + 1 \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) Montrer par l'absurde que la suite U n'est pas majorée.

d) En déduire la limite de la suite U.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k + 2}$

a) Vérifier que $\frac{1}{U_k+2} = \frac{1}{U_k+1} - \frac{1}{U_{k+1}+1}$

b) Montrer alors que $S_n = 1 - \frac{1}{U_{n+1}+1}$ puis calculer la limite de suite S.

Bon travail. ☺