Classe : 4ème Maths 1 **Devoir de contrôle N°1** **Pr : Marzouk Ali**

Lycée cité El Amel Gabés le 17/11/2013 Durée : 2h

Exercice n°2 :(4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+i)\,(i + e^{i\theta})\,z + i\,(i+e^{i\theta})^2 = 0$ avec $\theta \in]0,\pi[$

1) a)Résoudre l'équation (E).

b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o\,;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A ; M' M'' d'affixes respectives $a = -1 + i\,,z' = i + e^{i\theta}$ et $z'' = i\,(i + e^{i\theta})$

Déterminer et construire les ensembles des points M' et M'' lorsque θ décrit $]0,\pi[$

3)a)Montrer que OM'M'' est un triangle rectangle isocèle en O.

b) Montrer que $\frac{z' - a}{z'' - a} = -\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .En déduire que les points A, M' et M'' sont alignés.

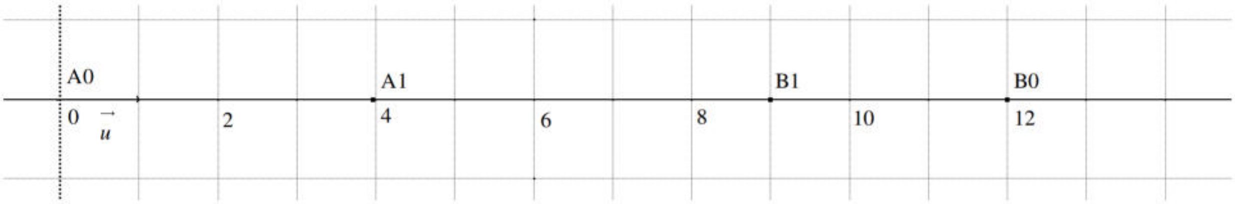
c)Déterminer l'affixe du point M pour que OM'MM'' est un carré.

Exercice n°1 :(5 points)

1) On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

a) Sur le graphique placer les points A_2, B_2. (Reproduire la figure sur votre copie)



b) On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.

Montrer que : $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et que $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique, préciser la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

3)a)Montrer que pour tout entier naturel n : $a_n \le b_n$

b)Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

4) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3a_n + 4b_n$.

a)Montrer que la suite (v_n) est constante.

b) Déterminer la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

Exercice n°3 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

E = C * D, F = C * B et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

1) a)Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$ Montrer que : $r_{\left(A\,,\,\frac{\pi}{6}\right)} = S_{(AI)} o\, S_{(AD)}$

Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(I\,,\,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta}\, o\, S_{(IA)}$

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r_{\left(I\,,\,\frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A\,,\,\frac{\pi}{6}\right)}$

2)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f(E) = F

b)Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c)Montrer que f(D) = C

3) Soit g le antidéplacement tel que g(D) = C et g(C) = B

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) On désigne par Δ et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g.

Montrer que $g\ o\ g = t_{2\vec{u}}$ et déterminer $\vec{u}$ et Δ

Exercice n°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur [0, π [par $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) a)Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de [0, π [sur [0, +∞ [

c)Montrer que f^{-1} est dérivable sur [0, +∞ [et que pour tout $x \geq 0$: $(f^{-1})' = \frac{2}{1+x^2}$

2) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $g(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Montrer que g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et calculer g '(x)

b) Calculer $f^{-1}(1)$ .En déduire que pour tout $x > 0$: $f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi$

3) On pose pout tout entier non nul n : $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{n}^{2n} f^{-1}\left(\sqrt{k}\right)$ et $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{n}^{2n} f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

a)Montrer que pour tout entier non nul n : $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq a_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que (a_n) est convergente et calculer sa limite.

c)Exprimer b_n en fonction de a_n et déterminer la limite de b_n.