-Lycée : *ELAMEL Fouchana*	DEVOIR DE CONTROLE N°1	Prof : *B.Zouhaier*
-Classe :*4éme MATHS*		*Novembre 2013*

Exercice N°1 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux (avec justification)

1. Soit l'équation E d'inconnue z définie par $z^3=\bar{z}$

   a-$e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de E

   b-si $\propto$ est une solution non nulle de E alors $|\alpha| = 1$

   c-si $|\alpha| = 1$ alors α est une solution de E

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b telles que $\frac{a}{b} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

   a-O,A et B ne sont pas alignés

   b-OAB est un triangle rectangle en O

   c-OAB est un triangle équilatéral

Exercice N°2 : (6 points)

Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall$ n$\in \mathbb{N}$, $U_n > 0$
2. a-Montrer que $U_{n+1}^2 - U_n^2 \geq 4$

   b-En déduire que $U_n \geq 2\sqrt{n}$

   c-Déterminer alors la limite de la suite U
3. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$

   a-Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$; $V_n \leq 4 + \frac{1}{n}$

   b-Déterminer alors la limite de la suite V
4. a-Montrer que pour tout n≥ 1 ; $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

   b-En déduire que $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} \leq 2\sqrt{n}$
5. Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{K=1}^{n} V_K$

   a-Montrer que $S_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$

   b-Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n^2}{n}\right)$

Exercice N°3 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A,M et N les points d'affixes respectives -1, z et z'. où z est un nombre complexe différent de -1 et z'= $\frac{z^2}{z+1}$

1. a-montrer que z' est réel ssi z = $\bar{z}$ ou z$\bar{z}$ = -(z+$\bar{z}$)

   b-En déduire l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel

2. Soit z un complexe non nul vérifiant z$\bar{z}$ = -(z+$\bar{z}$) et soit θ un argument de z $\theta \epsilon]-\pi,\pi[$

   a-Montrer que $|z|$ = -2cosθ

   b-En déduire que z'=-cos$^2\theta$

   c-Montrer que M varie sur le cercle de centre A et de rayon 1, alors ℕ varie sur un segment que l'on précisera

3. On suppose que M est distinct d'O. montrer que si le triangle OMA est rectangle en M, alors le triangle OMN est rectangle en O.

Exercice N°4 : (5points)

Soit la fonction f définie sur ℝ \{1} par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}^2 - 2x + x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}\, sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & si\ x\epsilon]-\infty, 0[\ \setminus \{1\} \end{cases}$$

1. a-Montrer que pour tout réel x de]0,1[$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ ≤ f(x) ≤ -$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

   b-Montrer que f est continue en 0

   c-Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\, f(x)$

2. On pose U(x)=$\frac{\pi(x-1)}{x}$; V(x)= $\frac{sinx}{x}$ et W(x)= $\frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour tout x ∈]0,+∞[\ $\{1\}$

   a-Montrer que pour tout x ∈]0,+∞[\ $\{1\}$; f(x) = W(x).(VoU)(x)

   b- En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1

   c-A l'aide de g, montrer que l'équation sin$\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle]1,2[une solution.

Bon travail