

EXERCICE N°1 (02,25 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1°) Soit (U_n) une suite à termes non nuls ; si (U_n) converge alors la suite $\left(\frac{1}{U_n^2}\right)$ est convergente

2°) Soit n un entier naturel. $(\sqrt{3} + i)^n$ est réel strictement positif si et seulement si, n est un multiple de 12

3°) Le nombre complexe : $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ est une racine 9^{ème} de l'unité

EXERCICE N°2 (05,5 pts)

1°) Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

On a tracé la courbe représentative ζ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} / \{-1\}$

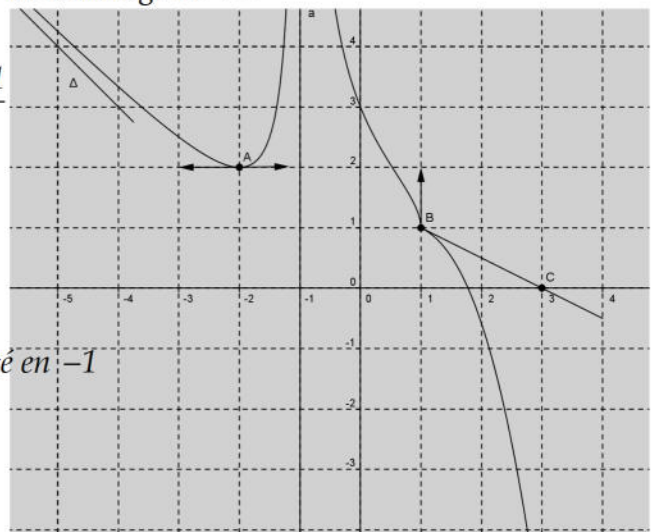
- La droite $\Delta : y = -x - 1$ est une asymptote de ζ au voisinage de $-\infty$
- ζ admet une tangente horizontale au point $A(-2, 2)$
- ζ admet une demi-tangente verticale au point $B(1, 1)$
- $[BC)$ est une demi-tangente à ζ
- La droite d'équation : $x = -1$ est une asymptote de ζ
- ζ admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$

Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-2}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}$

b- Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R} / \{-1\}$ une unique solution α

c- La fonction $\frac{1}{f}$ admet-elle un prolongement par continuité en -1



2°) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 + 3} & , \text{ si } x \leq -1 \\ \frac{-x + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} & , \text{ si } x > -1 \end{cases}$

a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

b- Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $-1 \leq g(x) \leq \frac{1-x}{1+x}$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c- Vérifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $g(x) = -1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1}{x+1}$

Puis montrer que g est continue en -1



3°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} g \circ f(x)$

EXERCICE N°3 (05,25 pts)

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

b- Montrer que (U_n) est croissante

c- Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2°) a- Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $U_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{(n+2)}}$

b- Retrouver alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3°) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par: $V_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$

a- Calculer pour tout n de \mathbb{N} , V_n en fonction de n

b- Montrer que pour tout entier $n \geq 3$ on a: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+2$

c- Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

EXERCICE N°4 (07 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

I°) On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de i , on associe le point M'

d'affixe z' tel que: $z' = \frac{iz + a}{z - i}$, ou $a \in \mathbb{C}$ et on désigne par A et B d'affixes respectives $-i$ et i .

1°) Montrer que les affixes des points invariants par f vérifient l'équation (E) : $z^2 - 2iz - a = 0$

2°) On pose : $a = 1 - e^{i2\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$

Résoudre l'équation (E)

3°) On pose: $z_1 = i - ie^{i\theta}$ et $z_2 = i + ie^{i\theta}$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2

a- Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $]0, \pi[$

b- Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O

c- Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit isocèle de sommet principal O

II°) Par la suite, on pose : $a = 0$

A tout point M d'affixe z distinct de $-i$, on associe le point N son symétrique par rapport à la droite (O, \vec{u}) et au point N , on associe le point M' par f

1°) Vérifier que : $z' = \frac{i\bar{z}}{z - i}$

2°) a- Montrer que pour tout $z \neq -i$, on a: $(z' - i)(\bar{z} - i) = -1$

b- Montrer alors que : $BM \times AM = 1$ et que $(\widehat{AM, BM'}) \equiv \pi [2\pi]$

c- Dédire une construction géométrique du point M' , image d'un point M appartenant au cercle ζ de centre A et de rayon 1.

BON
STAVAS