

<i>L. Regueb</i>	<b>Mathématiques</b>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir de Contrôle N°1</i>	<i>Le : 20/11/2012 D: 2h</i>

### Exercice1(8pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-\infty, 1]$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1)a) Montrer que  $f$  est continue sur  $I$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$ .

2)a) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

b) Déterminer  $f(I)$  et  $f([0, 1])$ .

3)a) Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$  admet dans  $]0, 1[$  une unique solution  $\alpha$ .

b) Vérifier que 0.7 est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$  par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg}(x)) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que  $g$  est continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = -\frac{4}{9}$  admet une solution  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ . Calculer  $\operatorname{tg}(\beta)$ .

### Exercice2(7pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $f$  l'application du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe :  $z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ .

On désigne par  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $i$  et  $-i$ .

1) Montrer que  $f$  admet deux points invariants que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ , les points  $A$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés.

3) Soit  $(\Gamma)$  le cercle de diamètre  $[OB]$ .

a) Montrer que pour tout  $M$  du plan distinct de  $O$  et  $B$  on a :  $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{MB, MO}) \pmod{2\pi}$ .

b) En déduire que si  $M \in \Gamma$  alors  $M'$  appartient à une droite  $\Delta$  que l'on précisera.

c) Donner une construction du point  $M'$  image d'un point  $M$  de  $(\Gamma)$ .

### Exercice 3 (5pts)

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation ,  $(E_\theta) : z^2 - 2i\sin(2\theta)z - 1 = 0$  où  $\theta$  est un réel donné .

1)a) Vérifier que  $e^{i2\theta}$  est une solution de  $(E_\theta)$  .

b) En déduire la deuxième solution , qu'on donnera sous la forme exponentielle .

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation ,  $(E'_\theta) : z^4 - 2i\sin(2\theta)z^2 - 1 = 0$  où  $\theta$  est un réel donné .

On donnera les solutions sous forme exponentielle .

3) Montrer que les points images des solutions de  $(E'_\theta)$  sont les sommets d'un rectangle .