

4 année Mathématiques
Mathématiques
Devoir de contrôle n° 1

Durée 2 h

Exercice 1

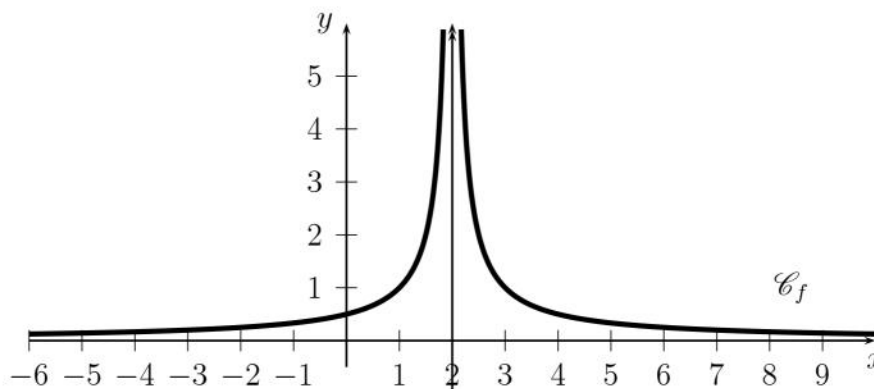
2.5 points

Répondre par VRAI ou FAUX sans justifier la réponse.

1. La seule isométrie fixant trois points distincts et l'identité du plan.
2. Les symétries glissantes sont les seules isométries sans points fixes.
3. Si A un point n'appartenant pas à la droite Δ alors $S_A \circ S_\Delta$ est une symétrie orthogonale.
4. La composée de deux symétries orthogonales distinctes est soit une translation soit une rotation.
5. La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul est une rotation.

Exercice 2

2.5 points



Dans le graphique ci-dessus (\mathcal{C}_f) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

Les droites $x = 2$ et $y = 0$ sont des asymptotes à (\mathcal{C}_f).

1. par une lecture graphique donner: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(]2, +\infty[)$.
2. Soit h la fonction définie par $h = g \circ f$ avec $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition de h .
 - (b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 2.
 - (c) Montrer que h strictement croissante sur $]2, +\infty[$.
 - (d) Déterminer $h(]2, +\infty[)$.

Exercice 3**4 points**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

- (a) Calculer $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$ et $f(1)$.
(b) Dédire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distincts dans \mathbb{R} .
- (a) Soit $\alpha \in [0, \pi]$, vérifier que $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.
(b) Déterminer en fonction de $\cos \alpha$ les trois solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4**3 points**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ et $b_n = \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + \sin n}$

- Montrer que (a_n) converge vers 0.
- Exprimer b_n à l'aide de a_n où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Exercice 5**8 points**

Dans un plan muni d'un repère orthomormé (O, \vec{u}, \vec{v}) on donne le cercle ζ de centre O et de diamètre $[A_0B]$ avec A_0 et B deux points d'affixes respectives $\omega_0 = 1$ et $z_B = -1$.

Le but de l'exercice est de construire un pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ de centre O .

On désigne par ω_k l'affixe du point A_k avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- (a) Justifier que pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\omega_k = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^k$.
(b) Montrer que $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$.
(c) Dédire que $4 \cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2 \cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. (On donne $2 \cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1 = \cos(\frac{4\pi}{5})$).
- Resoudre dans \mathbb{C} l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$, puis déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
- Dans la figure de la page annexe on donne le points I d'affixes $z_I = \frac{1}{2}i$. On désigne par ζ' le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$ et par J le point d'intersection de ζ' et $[IB]$.
 - Montrer que $BA_2 = 2 \cos(\frac{2\pi}{5})$.
 - Calculer BI puis déduire que $BJ = BA_2$.
- Donner un procédé de construction du pentagone puis le construire.

Annexe

Nom.....

Prenom.....

N....

