L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 08 / 11 / 10	**Durée : 2 heures**	**Classe : $4M_2$**

Exercice N°1 (2points)

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte ; sur votre copie reportez le numéro de la proposition et la lettre correspondante à la réponse correcte.
(aucune justification n'est demandée)

1) Le quotient de 12345 par – 57 est égal à:

a) –215 b) – 216 c) – 217

2) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$. La congruence $a_n \equiv 0$ [5] est valable pour:

a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

3) Soit x un entier relatif tel que : $x \equiv 16$ [17].

a) $x^{2010} + x^{2011} \equiv 0$ [17] b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0$ [17] c) $x \equiv 2^{88}$ [17]

4) L'ensemble $\{M(z) \in P \ / \ \arg[(z+1-i)(\bar{z}+2+3i)] \equiv \pi [2\pi]\}$ est

a) une droite b) une demi-droite c) un segment

Exercice N°2 (3 points)

1) a) Montrer que pour tout réel x, on a: $e^{ix} + e^{3ix} + e^{5ix} + e^{7ix} = 4(\cos x)(\cos 2x)e^{4ix}$

b) En déduire la transformation en produit de chacune des expressions suivantes:

$A = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$ et $B = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

2) A laide des nombres complexes, montrer les égalités: $\begin{cases} \cos x - 2\cos 2x + \cos 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 \cos 2x \\ \sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 \sin 2x \end{cases}$

Exercice N°3 (4 points)

1) Soit n un entier naturel.

a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de 4^n par 9.

b) Soit le nombre $A_n = 4^n \times (3n - 1) + 1$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier A_n est divisible par 9.

2) Déterminer le chiffre des unités de l'entier 7^{2011}.

3) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 17 de $5 \times 35^{123} - 9 \times 50^{312}$.

Exercice N°4 **(5 points)**

A tout nombre réel $\theta \in]-\pi,\pi[$ on associe l'équation à variable complexe z

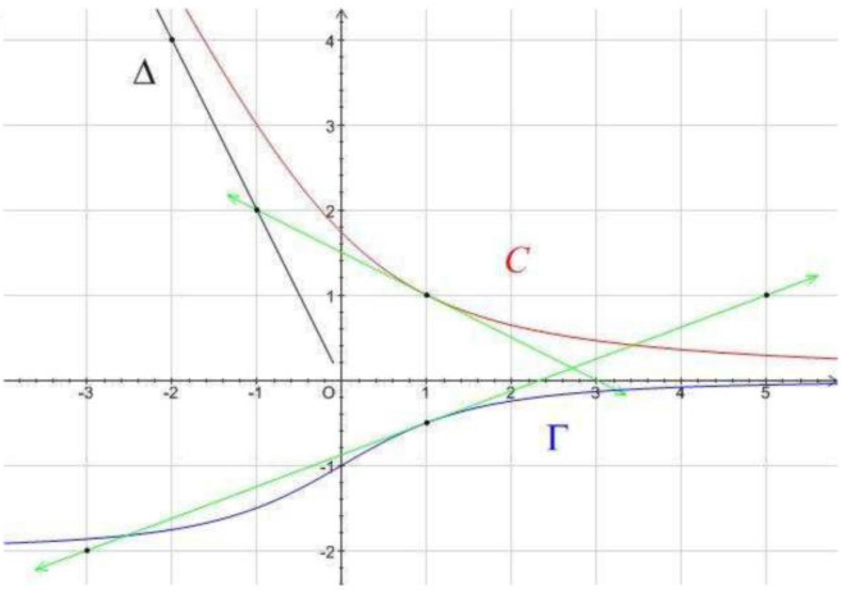
$$(E_\theta) : \ z^2 - 2i(1 + \cos\theta)z - 2(1 + \cos\theta) = 0 .$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2) On pose : $z_1 = i(1 + e^{i\theta})$ et $z_2 = i(1 + e^{-i\theta})$ et on désigne par M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_2.
   b) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M_1 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.
   c) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une symétrie orthogonale que l'on précisera.
   d) En déduire l'ensemble Γ_2 des points M_2 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

Exercice N°5 **(6 points)**

Dans la figure ci-contre C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f; Γ est la courbe de sa fonction dérivée.
L'axe des abscisses est une asymptote commune aux deux courbes C et Γ au voisinage de $+\infty$.
La droite Δ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.



A/ Par lecture graphique, déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x-1]$

3) $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$.

B/ On donne $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x$.

<u>**N.B:**</u> Dans la suite toutes les questions <u>**ne seront plus**</u> traiter par lecture graphique.

1) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in IR$.
   b) Calculer $f''(x)$ pour $x \in IR$ et en déduire que f' est strictement croissante sur IR.
   c) En appliquant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2},2]$ on a:

$$|f(x) - 1| \le \frac{3}{4}|x - 1|$$

2) Soit g une fonction continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[et tel que: $g(0) = 1$ et $g(1) = \sqrt{3}$.
   a) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.
   b) Montrer qu'il existe au moins un réel $\beta \in]0,1[$ tel que $f'(\beta) = - g'(\beta)$.

3) On pose $u(x) = x\sin(\frac{2}{x})$ et $v(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \cos(\frac{1}{x})$
   a) A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions u et v.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(u\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}(f\circ v)(x)$

Exercice N°1

1) b < 0 donc q = E(a/b) + 1 = - 216 → b)
2) Il suffit de remarquer que la congruence est fausse pour n = 0 et en tenant compte de la présentation de l'exercice (une et une seule…) on peut conclure que la réponse c) est la correcte → c)
3) En remarquant que: $16 \equiv -1\ [17]$ on peut conclure immédiatement que a) est la bonne → a)
4) Remarquer que : $\arg[(z+1-i)(\bar{z}+2+3i)] \equiv \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{z+1-i}{z+2-3i}) \equiv \pi[2\pi]$ on peut conclure qu'il s'agit d'un segment →c)

Exercice N°2

1) a) $$e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix} = e^{ix}(1+e^{2ix})+e^{5ix}(1+e^{2ix})$$
$$= e^{ix}(1+e^{2ix})(1+e^{4ix})$$
$$= e^{ix}[e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix})][e^{2ix}(e^{-2ix}+e^{2ix})]$$
$$= 4\cos x\cos 2x\, e^{4ix}$$

b)
* $e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}+e^{7ix} =$
$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+i(\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x)$
* $4\cos x\cos 2x\, e^{4ix} =$
4cosxcos2xcos4x + 4icosxcos2xsin4x

Donc, en tenant compte de l'égalité établie en a) on obtient: $\begin{cases} A = 4\cos x\cos 2x\cos 4x \\ B = 4\cos x\cos 2x\sin 4x \end{cases}$

2) $$e^{ix}-2e^{2ix}+e^{3ix} = e^{2ix}(e^{-ix}-2+e^{ix})$$
$$= (-2+2\cos x)e^{2ix}$$
$$= -4(\sin(\frac{x}{2}))^2 e^{2ix}$$

L'identification des écritures sous forme algébrique des deux membres de l'égalité permet de déduire que:

$$\begin{cases} \cos x-2\cos 2x+\cos 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2\cos 2x \\ \sin x-2\sin 2x+\sin 3x = -4(\sin(\frac{x}{2}))^2\sin 2x \end{cases}$$

Exercice N°3

1) a) $4^0 \equiv 1\ [9]$ $4^1 \equiv 4\ [9]$ $4^2 \equiv 7\ [9]$ $4^3 \equiv 1\ [9]$
Si n = 3p, p∈IN alors $4^n = (4^3)^p \equiv 1[9]$ donc r = 1
Si n = 3p+1, p∈IN alors $4^n = (4^{3p})4 \equiv 4[9]$ donc r = 4
Si n = 3p+2, p∈IN alors $4^n = (4^{3p})4^2 \equiv 7[9]$ donc r = 7

b) <u>**si n = 3p**</u> alors $3n - 1 = 9p - 1 \equiv -1[9]$ et $4^n \equiv 1[9]$
donc $A_n \equiv -1 + 1 \equiv 0\ [9]$
<u>**si n = 3p+1**</u> alors $3n - 1 = 9p + 2 \equiv 2\ [9]$ et $4^n \equiv 4\ [9]$
donc $A_n \equiv 8 + 1 \equiv 0\ [9]$
<u>**si n = 3p+2**</u> alors $3n - 1 = 9p + 5 \equiv 5\ [9]$ et $4^n \equiv 7\ [9]$
donc $A_n \equiv 35 + 1 \equiv 0\ [9]$

2) $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^{2011} \equiv -7 \equiv 3[10]$ donc le chiffre des unités de 7^{2011} est égal à **3**

3) $35 \equiv 1[17]$ et $50 \equiv -1[17]$ donc
$5\times 35^{123} - 9\times 50^{312} \equiv 5 - 9 \equiv 13\ [17]$ donc **r = 13**.

Exercice N°4

1) $\Delta' = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ donc:
$z' = -\sin\theta + i(1+\cos\theta)$ et $z'' = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$

2) a) $z_1 = i(1 + e^{i\theta}) = ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ donc

$z_1 = [2\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]$

On peut faire un raisonnement analogue ou remarque que $z_2 = -\overline{z_1}$ et déduire immédiatement

$z_2 = [2\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{-\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]$

b) $z_1 = i + ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - i = ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - i = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = 1 \\ \arg(z-i) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM_1 = 1 \\ (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM_1}}) \text{ décrit } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \text{avec } A(i)$$

Donc Γ_1 est le cercle de centre A et de rayon 1 privé de l'origine O. (l'origine correspond à z_1 pour $\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$)

c) en a) on a remarqué que $z_2 = -\overline{z_1}$ ce prouve que M_2 est l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe (yy').

d) Le centre de Γ_1 étant sur l'axe de symétrie (yy') donc $\Gamma_2 = \Gamma_1$.

Exercice N°5

A/ 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x-1]=-1$

3) f(1) = 1

$f'(1)=-\frac{1}{2}$ (coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1)

$f''(1)=\frac{3}{8}$ (coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 1)

B/ 1) a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

b) $f''(x)=\frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

Pour tout $x\in$IR, $f''(x)>0$ donc f ' est strictement croissante sur IR.

c) f ' est croissante sur IR donc:

$\frac{1}{2}\le x\le 2 \Rightarrow f'(\frac{1}{2})\le f'(x)\le f'(2)$ et comme

$f'(2)<0$ donc $|f'(x)|\le -f'(\frac{1}{2})\le\frac{3}{4}$ (à vérifier par le calcul).

$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [\frac{1}{2},2] \\ \text{pour tout } t\in[\frac{1}{2},2],\ |f'(t)|\le\frac{3}{4}\end{cases}$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x\in[\frac{1}{2},2]$ on a: $|f(x)-f(1)|\le\frac{3}{4}|x-1|$ et comme f(1) = 1 donc on peut conclure que:

pour tout $x\in[\frac{1}{2},2]$ on a: $|f(x)-1|\le\frac{3}{4}|x-1|$

2) a) Posons $\varphi(x) = f(x) - g(x)$; $x\in[0,1]$

* f et g sont continues sur [0,1] donc φ est continue sur [0,1].

*$\varphi(0)=f(0)-g(0)=\sqrt{3}-1>0$

$\varphi(1)=f(1)-g(1)=1-\sqrt{3}<0$

* $\begin{cases}\varphi \text{ est continue sur } [0,1] \\ \varphi(0)\times\varphi(1)\prec 0\end{cases}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.

$\varphi(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha)$

b) Posons $\Psi(x) = f(x) + g(x)$, $x\in[0,1]$

$\begin{cases}\psi \text{ est continue sur } [0,1] \\ \psi \text{ est dérivable sur }]0,1[\\ \psi(0)=1+\sqrt{3}=\psi(1)\end{cases}$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe au moins $\beta\in]0,1[$ tel que: $\Psi'(\beta)=0$

$\Psi'(\beta)=0 \Leftrightarrow f'(\beta)=-g'(\beta)$

3) a) * Pour tout $x\neq 0$, $|u(x)|\le|x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$

* $\begin{cases}\text{pour tout } x\neq 0, v(x)\le\frac{-1}{x^2}+1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}+1=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=-\infty$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0}u(x)=0\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(uof)(x)=0$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}v(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(fov)(x)=+\infty$